

ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法

津田尚胤¹・貝戸清之²・山本浩司³・小林潔司⁴

¹学生会員 京都大学大学院修士課程 大学院工学研究科都市社会工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail:y-tsuda@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

²正会員 株式会社BMC (〒 261-7125 千葉市美浜区中瀬2-6 WBG マリブウエスト25階)

E-mail:kaito@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

³ 中日本高速道路株式会社横浜支社保全・サービス事業部施設整備チーム (〒 222-8510 横浜市港北区新横浜3-9-18)

E-mail:k.yamamoto.af@c-nexco.co.jp

⁴フェロー会員 京都大学大学院教授 大学院経営管理研究科 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail:kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

土木施設のアセットマネジメントにおいて、土木施設の劣化予測が重要な課題となる。現実には、劣化状態に関する点検データが十分でなく、劣化予測モデルの推計精度が十分でない場合が少なくない。その際、技術者の経験的知識等を劣化予測に活用するとともに、新しく利用可能になった点検データに基づいて、劣化予測モデルの推計精度を逐次改良するような方法論が必要となる。本研究では、土木施設の故障の有無を予測するためのワイブル劣化ハザードモデルを、新しく利用可能になった点検データに基づいてベイズ推計する方法論を提案する。その際、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて、未知パラメータの事後分布を効率的に推計する方法を提案する。さらに、トンネル照明ランプを対象とした適用事例を通して、提案した方法論の有効性について考察する。

Key Words : Weibull hazard model, Bayesian estimation, Gibbs sampling, asset management

1. はじめに

土木施設のアセットマネジメントでは、ライフサイクル費用の低減化が図れるような最適補修戦略を求めることが重要な課題である。その上で、将来時刻における土木施設の補修需要を予測し、土木施設の維持補修のために必要となる予算計画を策定することが必要となる。アセットマネジメントを実施する上で、土木施設の劣化予測モデルは、ライフサイクル費用や補修需要を推計するために重要な役割を果たす。

土木施設の統計的劣化予測モデルに関しては、2.(1)で言及するように、すでにいくつかの研究の蓄積がある。本研究では、劣化過程を直接観測することが不可能であり、劣化の結果として生起する故障の有無のみが観測可能な土木施設を対象とする。青木等¹⁾は、ワイブル劣化ハザードモデルを用いて、このような特性を持つ土木施設の寿命を予測する方法を提案している。さらに、高速道路のトンネル照明ランプの不点の履歴に関するデータベースに基づいて、提案したワイブル劣化ハザードモデルの有効性を検証している。

一般に、土木施設の劣化に関するデータは、十分に整備されていないのが実情である。現在のところ、限られた点検データに基づいて、劣化予測モデルを推計せざるを得ず、劣化予測モデルの推計精度に問題がある場合が多い。あるいは、技術者の経験的判断に基づ

いて、劣化予測モデルを暫定的に用いざるを得ない場合もある。このような場合、技術者の経験的判断と限られた点検データに基づいて、劣化予測モデルを作成するベイズ推計法が有効である。さらに、点検データが蓄積されるにつれて、新しいデータを用いて暫定的劣化予測モデルをベイズ推計法により逐次更新（以下、ベイズ更新と呼ぶ）する方法論が必要となる。

本研究では、技術者の技術情報と新しい点検データを用いて、ワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推計法により作成する方法論を提案する。さらに、トンネル照明ランプを対象とした適用事例を通じて、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ更新の有効性を検証する。以下、2.では本研究の基本的な考え方を整理し、3.ではワイブル劣化ハザードモデルを説明する。4.で、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法を提案する。5.では、トンネル照明ランプを対象とした適用事例について述べる。

2. 本研究の基本的立場

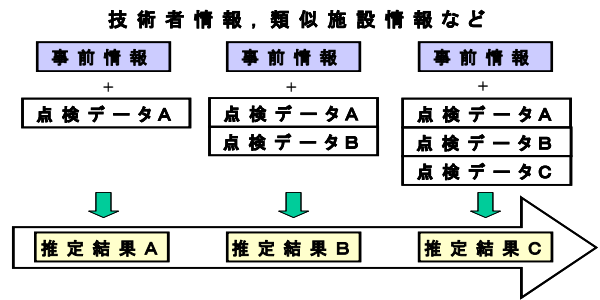
(1) 従来の研究概要

土木施設の劣化予測に関しては、数多くの研究事例がある。土木施設の劣化予測モデルとして、1)過去の目視検査結果に基づいた統計的な劣化予測モデル^{1)–7)}、2)土木施設の力学的劣化メカニズムに着目した劣化

予測モデル⁸⁾-¹³⁾が提案されている。劣化箇所の詳細な余寿命や具体的な補修戦術を求める場合、2)の力学的な劣化予測モデルが有効であろう。しかし、使用環境などの不確定なパラメータが支配的な場合、劣化メカニズムの予測が困難となる。また、個々の劣化現象に関する詳細な情報が必要となる。このため、数多くの土木施設を同時に管理する場合、力学的予測モデルを用いてすべての施設の劣化を予測することは困難となる。一方、1)の統計的な劣化予測モデルは、多くの劣化サンプルから、劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化することを目的とする。統計的劣化予測モデルは、数多くの土木施設で構成される土木施設システムのアセットマネジメントにおいて、補修戦略や予算配分の問題を検討するために必要となる。

本研究では、ハザードモデルを用いた統計的劣化予測モデルのベイズ推計問題を取りあげる。ハザードモデルは、信頼性解析の分野で施設や機械の寿命を予測するモデルとして開発され、信頼性解析のみならず多くの分野で適用事例が報告されている。また、ハザードモデルの推計方法に関しても研究成果が蓄積されており、その結果はいくつかの成書^{14),15)}に詳しい。アセットマネジメントの分野においても、ハザードモデルを用いた劣化予測モデルがいくつか提案されている¹⁾⁻⁵⁾。例えばShin&Madanat³⁾は道路舗装のひび割れ開始時刻を予測するためのワイブル劣化ハザードモデルを提案している。また、青木等¹⁾はトンネル照明を対象として、ワイブル劣化ハザードモデルの有効性について実証的に検証している。さらに、ワイブル劣化ハザードモデルを拡張した多段階指数劣化ハザードモデル⁴⁾、多段階ワイブル劣化ハザードモデル⁵⁾を提案している。ハザードモデルは構造物の構造特性や目視検査の時間間隔等、異なるデータ特性を持つ土木施設の劣化過程を同時にモデル化することが可能であり、今後の研究の発展が大いに期待できる。一般に、劣化ハザードモデルを推計するためには十分なデータ量が必要となる。しかし、データ量が蓄積されるまでには長時間を必要とするため、このような場合、技術者の事前の技術情報や、限られた点検データに基づいて劣化予測モデルを暫定的に作成せざるを得ない。さらに、新しい追加的なデータが利用可能になった段階で、劣化予測モデルを逐次改良していくような方法論が必要となる。

ベイズ推計法を用いることにより、先験的な事前情報の有効利用、追加的なデータに基づいたモデルの更新を統一的な枠組みの中で実施することが可能である。ベイズ統計学自体、長い研究の歴史があり^{16),17)}、土木工学の分野でもいくつかの適用事例がある¹⁸⁾。ハザードモデルに関するベイズ統計学に関しても、Guttmanによる先駆的研究¹⁹⁾以降、生存時間解析モデルに関する



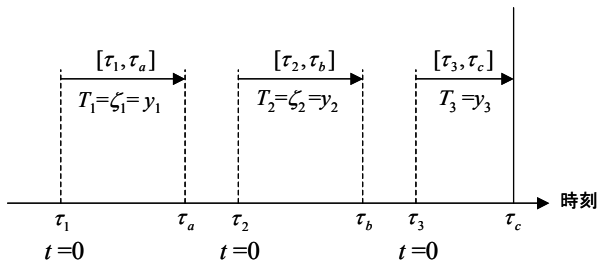
注) 点検データが追加された段階で劣化予測モデルを逐次更新していく。点検データがない初期には、技術者の経験情報などの事前情報に基づいて初期モデルを作成する。データの蓄積に伴い、劣化予測モデルに対する主観的な事前情報の影響は薄れていく。

図-1 本研究の基本的な考え方

ベイズ統計学が発展を遂げた²⁰⁾⁻²⁴⁾。さらに、近年では、関数形、確率分布形を特定化しないセミ(非)パラメトリック・ハザードモデルに関する研究も発展している²⁵⁾⁻²⁷⁾。これら最新の研究成果が、ベイズハザードモデルとして体系化されている²⁸⁾。しかし、ハザードモデルにベイズ推計法を適用する場合、ハザードモデルのパラメータに関する共役分布を解析的に求めることが不可能であり、実用化の障壁となっていた。近年になりマルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov Chain Monte Carlo Method; 以下、MCMC法という)の発展により、ハザードモデルを効率的にベイズ推計することが可能になった²⁹⁾⁻³²⁾。本研究では、青木等が提案したワイブル劣化ハザードモデル¹⁾をMCMC法を用いてベイズ推計する方法論を開発する。

(2) ベイズ推計法の必要性

ベイズ統計学は、対象とする事象が生起する確率を推定するにあたり、分析者が事前に保有している情報、知識、経験等を活用し、主観的に確率を決定する立場に立っている。ベイズ推計法では、事前情報を積極的に活用できるため、標本が少ない場合にも未知パラメータの推計を行うことが可能であり、より多くの未知パラメータをモデルに採用することも可能となる。また、標本の追加に対しても容易にモデルを更新できるという優れた特徴を持っている。このような特性を有するベイズ統計学を、劣化予測モデルの推計に適用するための基本的な考え方を図-1に示している。現実のアセットマネジメントでは、過去の点検データの蓄積が十分ではなく、技術者の経験的判断等に基づいて、劣化予測モデルを暫定的に設定せざるを得ない場合が少なくない。また、土木施設によっては、新しい技術や新製品の導入により、過去に劣化過程に関する情報がまっ



注) 施設寿命サイクル $[\tau_1, \tau_a]$, $[\tau_2, \tau_b]$ はそれぞれ施設使用期間 $T_1 = \tau_a - \tau_1$, $T_2 = \tau_b - \tau_2$ が施設寿命 ζ_1, ζ_2 と一致するが、寿命サイクル $[\tau_3, \tau_c]$ は施設寿命が観測されない不完全サイクルになっている。

図-2 完全モニタリングスキーム

たく蓄積されていない場合もあろう。このような場合、過去の類似の土木施設を対象として作成した劣化予測モデルを、初期モデルとして暫定的に用いることも1つの方法である。あるいは、技術者の経験情報に基づいて、主観的に劣化予測モデルを設定せざるを得ない場合もあろう。いずれの場合にせよ、データが蓄積されていない段階で作成した初期モデルは、あくまでも暫定的モデルであり、新しい点検データが利用可能になった段階で劣化予測モデルを逐次更新していく必要がある。ベイズ推計法を用いることにより、このような初期モデルの暫定的な作成や、モデルの逐次更新の方法論を開発することが可能となる。さらに、データが蓄積されるに従って、初期モデルを推計する際に用いた経験的判断の影響力が次第に薄れていき、長期的には客観的データに基づいて推計した劣化予測モデルに収束するという望ましい特性がある。さらに、このようなモデルの更新過程において、モデルの信頼性を統一的に評価するための分析的枠組みを提供するという利点を有している。

(3) モニタリング情報の種類

劣化ハザードモデルを推計するためには、土木施設の故障の有無に関する時系列データの蓄積が必要となる。その際、土木施設の点検・補修過程に応じて、劣化予測モデルの推計方法が多様に異なる。いま、土木施設のモニタリング情報を、点検・補修過程の特性により、1) 完全モニタリング情報、2) 定期モニタリング情報に分類しよう。

完全モニタリング情報は、施設の使用を開始した時刻と、故障した時刻に関する点検・更新履歴(図-2参照)が獲得できるような情報を意味する。図中、時刻 τ はカレンダー上の実時刻を表す。以下、実時刻を「時刻」と呼ぶ。施設が使用(更新)された時刻から故障が

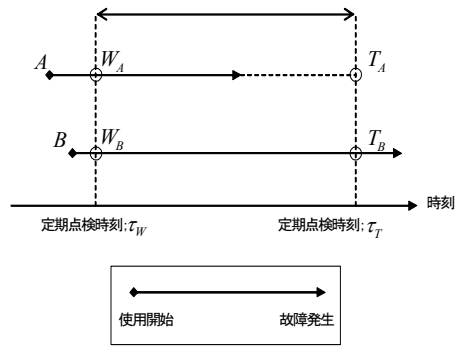


図-3 定期モニタリング情報

発生する時刻までの間隔を施設寿命と定義する。図-2の例では、期間 $[\tau_1, \tau_a]$, および $[\tau_2, \tau_b]$ がそれぞれ1つの施設寿命サイクルと対応している。さらに、各寿命サイクルにおける施設の使用・更新時刻を当該サイクルの初期時点と考え、サンプル時点を $t=0$ に基準化する。このように個々のサンプルに固有に定義されるサンプル時点を、以下では「時点」と呼ぶ。また、更新された時刻から故障が発生するまでの完全なライフサイクルに関する情報が利用可能なサンプルを、「完全サンプル」と呼ぶ。さらに、図中のサイクル $[\tau_3, \tau_c]$ では、寿命サイクルは現在時刻 τ_c で終了しておらず、不完全サイクルを形成している。以下では、不完全サイクルを形成しているサンプルを「不完全サンプル」と呼ぶ。

土木施設の故障の有無を連続的にセンサーで常時監視する場合、完全モニタリング情報が獲得できよう。しかし、多くの土木施設の劣化状態を常時観測することは不可能である。現実には、時間軸上の限られた時刻において実施される点検業務を通じて土木施設の劣化状態をモニタリングできることが少なくない。いま、ある一定の時間間隔を経て定期的に施設を点検するモニタリングスキームを考えよう。このような定期モニタリングスキームで獲得できる情報を定期モニタリング情報と呼ぶ。図-3に示すように、時刻 τ_W と τ_T に施設の劣化状態を一斉にモニタリングする場合を考える。施設が使用開始された時点を $t=0$ に基準化し、2つの連続するモニタリング時点をそれぞれ W_i, T_i ($W_i < T_i$) と表そう。図中の施設Aの場合、モニタリング時点 $t = W_A$ では故障が発生していないが、時点 $t = T_A$ では故障が発生している。この場合、故障が発生した正確な時点は観測できないが、少なくとも期間 $(W_A, T_A]$ の中のどこかの時点で故障が発生したという完全サンプルを獲得できる。一方、施設Bの場合、時点 W_B, T_B の双方において、故障が発生していない。この場合、施設寿命はモニタリング期間長 T_B よりも長いという情報のみが獲得できる不完全サンプルとなる。モニタリング情報

のタイプが異なれば、ワイブル劣化ハザードモデルの推計法が異なる。以下では、完全モニタリング情報に基づいた推計法を説明するが、必要に応じて不完全モニタリング情報を用いた推計方法について言及する。

3. ワイブル劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提条件

ワイブル劣化ハザードモデルの詳細に関しては参考文献1)に譲る。しかし、4. でベイズ推計法について記述する上での便宜を図るために、その内容を簡潔にとりまとめておく。いま、同種の n 個の土木施設の故障の有無に関する完全モニタリング情報が獲得できる場合を考える。土木施設 i ($i = 1, \dots, n$)の使用開始時点 $t = 0$ から時点 $t = T_i$ に至るまでのモニタリング期間を考えよう。施設によりモニタリング期間長 T_i は異なる。ここで、モニタリング期間中に対象とする土木施設がサービスを提供していた期間長を「使用期間長」と呼び、確率変数 y_i で表現しよう。また、当該施設の寿命を確率変数 ζ_i で表そう。いま、施設が故障することによりモニタリング期間が終了する ($y_i = T_i$ が成立する) 場合、当該施設の使用期間長と寿命が一致し $y_i = \zeta_i$ が成立する。一方、モニタリングの終了時点において、施設が故障していない場合は、当該施設の寿命はモニタリング期間長 T_i より長くなり、 $\zeta_i > T_i$ が成立する。この場合、使用期間長はモニタリング期間長 T_i と一致する。すなわち、施設の使用期間長 y_i と寿命 ζ_i の間には

$$\begin{cases} \zeta_i = T_i \text{ならば, } y_i = \zeta_i \\ \zeta_i > T_i \text{ならば, } y_i = T_i \end{cases} \quad (1)$$

という関係が成り立つ。施設の故障によりモニタリング期間が終了すれば、施設寿命データを獲得できる。一方、モニタリング終了時点で、施設が故障していない場合、施設寿命を観測できない。しかし、施設寿命が少なくともモニタリング期間長 T_i (使用期間長 y_i) よりは少ないという情報を獲得することができる。このように劣化ハザードモデルの推計においては、使用期間より長い施設寿命が観測できないという観測データの切断の問題³³⁾が発生する。

(2) ハザードモデルの定式化

土木施設 i ($i = 1, \dots, n$)の寿命を確率変数 ζ_i で表し、確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数を $F_i(\zeta_i)$ に従って分布すると仮定する。ただし、寿命 ζ_i の定義域は $[0, \infty)$ である。いま、初期時点から任意の時点 $\zeta_i \in [0, \infty)$ まで、施設 i が故障しないで生存する確率 (以下、生存確率と呼ぶ) $\tilde{F}_i(\zeta_i)$ は、全事象確率1から時点 ζ_i までに施設が故障する累積故障確率 $F_i(\zeta_i)$ を差し引いた値

$$\tilde{F}_i(\zeta_i) = 1 - F_i(\zeta_i) \quad (2)$$

により定義できる。施設が時点 ζ_i まで生存し、かつ期間 $[\zeta_i, \zeta_i + \Delta\zeta_i]$ 中にはじめて故障する確率は

$$\lambda_i(\zeta_i)\Delta\zeta_i = \frac{f_i(\zeta_i)\Delta\zeta_i}{\tilde{F}_i(\zeta_i)} \quad (3)$$

と表せる。土木施設が時点 ζ_i まで生存し、かつ当該時点で故障する確率密度 $\lambda_i(\zeta_i)$ を劣化ハザード関数と呼ぼう。劣化ハザード関数 $\lambda_i(\zeta_i)$ を用いれば、時点 ζ_i まで施設が生存する確率 $\tilde{F}_i(\zeta_i)$ は

$$\tilde{F}_i(\zeta_i) = \exp \left[- \int_0^{\zeta_i} \lambda_i(u) du \right] \quad (4)$$

と表される。土木施設 i の劣化過程をワイブル劣化ハザード関数を用いて定義する。ここで、ワイブル劣化ハザード関数を

$$\lambda_i(y_i) = \gamma_i m y_i^{m-1} \quad (5)$$

と特定化しよう。ただし、 y_i は施設 i の使用期間長、 m は施設劣化の加速度を表す加速度パラメータである。式(5)において、土木施設 i の劣化過程を特徴づける γ_i は土木施設の特性ベクトルに依存すると考え、

$$\gamma_i = \exp(\mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}') \quad (6)$$

と表そう。ただし、 $\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \dots, \beta^K)$ は未知パラメータ β^k ($k = 1, \dots, K$)による行ベクトルである。記号 \prime は転置操作を表す。さらに、 $\mathbf{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^K)$ は施設 i の構造特性や使用環境を表す特性ベクトルである。ただし、 x_i^k ($k = 1, \dots, K$)は土木施設 i の k 番目の特性変数の観測値を表す。ワイブルハザード関数(5)を用いると確率密度関数 $f_i(y_i)$ 、生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ はそれぞれ次式で表される。

$$f(y_i) = \gamma_i m y_i^{m-1} \exp(-\gamma_i y_i^m) \quad (7a)$$

$$\tilde{F}(y_i) = \exp(-\gamma_i y_i^m) \quad (7b)$$

(3) 完全モニタリング情報

完全モニタリング情報に基づいて劣化ハザード関数を推計する問題をとりあげる。いま、図-2に示すように、すべての施設の使用開始時点 $t = 0$ と基準化し、施設 i ($i = 1, \dots, n$)の使用期間の実測値を \bar{y}_i と表す。以下、記号「 $\bar{\cdot}$ 」は実測値であることを表す。モニタリング期間中に施設寿命が終了した場合、使用期間と寿命が一致し $\bar{y}_i = \zeta_i$ が成立する。一方、モニタリング終了時点で施設寿命が終了していない場合、施設の使用期間はモニタリング期間長 \bar{T}_i と一致し、施設寿命 ζ_i は観測されない。そこで、施設 i の寿命がモニタリング期間を越えるかどうかを表すダミー変数 \bar{d}_i を

$$\bar{d}_i = \begin{cases} 1 & \bar{y}_i = \zeta_i \leq \bar{T}_i \text{の時} \\ 0 & \zeta_i > \bar{T}_i = \bar{y}_i \text{の時} \end{cases} \quad (8)$$

と定義する。この時、土木施設 i のモニタリング情報は $\xi_i = (\bar{d}_i, \bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i)$ と整理できる。ここで、ワイブル劣化

ハザードモデル(5),(6)の未知パラメータベクトル $\theta = (m, \beta)$ を定義する. さらに, $f(y_i)$, $\tilde{F}_i(y_i)$ が土木施設の特性データ \mathbf{x}_i , 未知パラメータベクトル θ の関数であることを明示的に示すために, $f(y_i, \mathbf{x}_i; \theta)$, $\tilde{F}_i(y_i, \mathbf{x}_i; \theta)$ と表記する. いま, 施設*i*に関してモニタリング情報 $\bar{\xi}_i = (\bar{d}_i, \bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i)$ が観測されたとしよう. この時, 施設*i*に関してモニタリング期間長により寿命 ζ_i の分布の右側が切断する条件を考慮した条件付き確率は,

$$\begin{aligned} \ell(\bar{d}_i, \bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta) &= f(\bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)^{\bar{d}_i} \tilde{F}(\bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)^{1-\bar{d}_i} \end{aligned} \quad (9)$$

と表される. ただし, 右辺第1項は, 故障によりモニタリング期間が終了し, 施設寿命が \bar{y}_i となる確率を意味しており, 第2項は, 施設寿命がモニタリング期間長 \bar{T}_i (すなわち, 使用期間長 \bar{y}_i) より長くなる確率を表している. 土木施設*n*個それぞれの劣化現象の生起は, 互いに独立に分布すると仮定すると, 尤度関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}) &= \prod_{i=1}^n \ell(\bar{d}_i, \bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(\bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)^{\bar{d}_i} \tilde{F}(\bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)^{1-\bar{d}_i} \end{aligned} \quad (10)$$

と表すことができる. $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ である. 最尤推定法では一般に尤度関数(10)の対数をとった関数を最大にするようなパラメータ値 $\hat{\theta}$ を最尤推定量として求める.

(4) 不完全モニタリング情報

尤度関数(10)は, 完全モニタリング情報に対して定義される. モニタリングスキームが異なれば, それと対応させて尤度関数の定義も異なる. 図-3に示した定期モニタリングスキームをとりあげよう. すなわち, 時点 $t=0$ において施設*i*の使用が開始され, 時点 $t=W_i$ と $t=T_i$ ($T_i > W_i$)という2つの時点で故障の有無がモニタリングされる. まず, 時点 $t=W_i$ で実施されたモニタリングにおいて故障が発見されず, 時点 $t=T_i$ において実施されたモニタリングで故障が発見された場合に注目しよう. この場合, 当該施設が故障した時点を正確に把握できないが, 少なくとも期間 $(W_i, T_i]$ 内に故障が発生したことは把握できる. 当該の施設寿命が少なくとも W_i より大きく, かつ期間 $(W_i, T_i]$ において故障する確率 $\hat{F}(W_i, T_i, \tilde{\mathbf{x}}_i; \theta)$ は

$$\begin{aligned} \hat{F}(W_i, T_i, \tilde{\mathbf{x}}_i; \theta) &= \Pr\{T_i \geq \zeta_i \geq W_i\} \\ &= \tilde{F}(W_i, \tilde{\mathbf{x}}_i; \theta) - \tilde{F}(T_i, \tilde{\mathbf{x}}_i; \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

となる. つぎに, 2つのモニタリング時点のいずれにおいても故障が発生していない確率は

$$1 - \hat{F}(W_i, T_i, \tilde{\mathbf{x}}_i; \theta) = \tilde{F}(T_i, \tilde{\mathbf{x}}_i; \theta) \quad (12)$$

となる. ここで, 施設*i*が期間 $(W_i, T_i]$ 内に故障したかどうかを表すダミー変数 d_i^f を

$$d_i^f = \begin{cases} 1 & W_i \leq \zeta_i \leq T_i \text{の時} \\ 0 & \zeta_i > T_i \text{の時} \end{cases} \quad (13)$$

と定義する. 上付き添え字 f は定期モニタリングスキームを意味する. 時点 \bar{W}_i, \bar{T}_i に定期モニタリングが実施され, モニタリングの結果得られた故障の有無に関する実測値 \bar{d}_i^f が生起する条件付き確率は

$$\begin{aligned} \ell^f(\bar{d}_i^f, \bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta) &= \hat{F}(\bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)^{\bar{d}_i^f} \\ &\times \{1 - \hat{F}(\bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)\}^{1-\bar{d}_i^f} \end{aligned} \quad (14)$$

と表せる. 土木施設*n*個の故障が互いに独立であると仮定すれば, 尤度関数は次式のようなになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^f(\theta|\bar{\xi}) &= \prod_{i=1}^n \ell^f(\bar{d}_i^f, \bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \hat{F}(\bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)^{\bar{d}_i^f} \\ &\times \{1 - \hat{F}(\bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i; \theta)\}^{1-\bar{d}_i^f} \end{aligned} \quad (15)$$

4. ハザードモデルのベイズ推計法

(1) ベイズの定理

最尤推定法は, 1) 標本数が十分に多い場合, 推定量が真の値に確率収束する(一致性), 2) 推定量の漸近的分散がクラメル・ラオの下限に等しい(漸近有効性)という優れた性質を有している³⁴⁾. しかし, 現実のアセットマネジメントの場面では, 過去に十分な点検が実施されておらず, 限られた点検データしか入手できない場合が少なくない. このように限られたサンプルに基づいてハザードモデルを推計した場合, 最尤推定量が不偏性を満足せず, 推定量に系統的なバイアスが生じる可能性がある. あるいは, 点検実績データがまったく存在せず, 技術者の経験的情報に基づいて, 劣化ハザードモデルを特定化せざるを得ない場合もある. このような場合, 限られた事前情報と少ないデータに基づいて, ハザードモデルを推計するための方法論が必要となる. さらに, データが蓄積されるに従って, ハザードモデルの改良を試みる必要がある. ベイズ推計法は事前情報を活用できるため, 標本が少ない場合でも比較的精度よく推計することができるという利点がある. また, 推計量の信頼域について検討することにより, ハザードモデルによる推計精度や, モデル改良による信頼度の向上の効果も検討することが可能であるという利点がある.

ベイズ推計法では, パラメータの事前分布と, 観測されたデータを用いて定義される尤度関数を用いて, パ

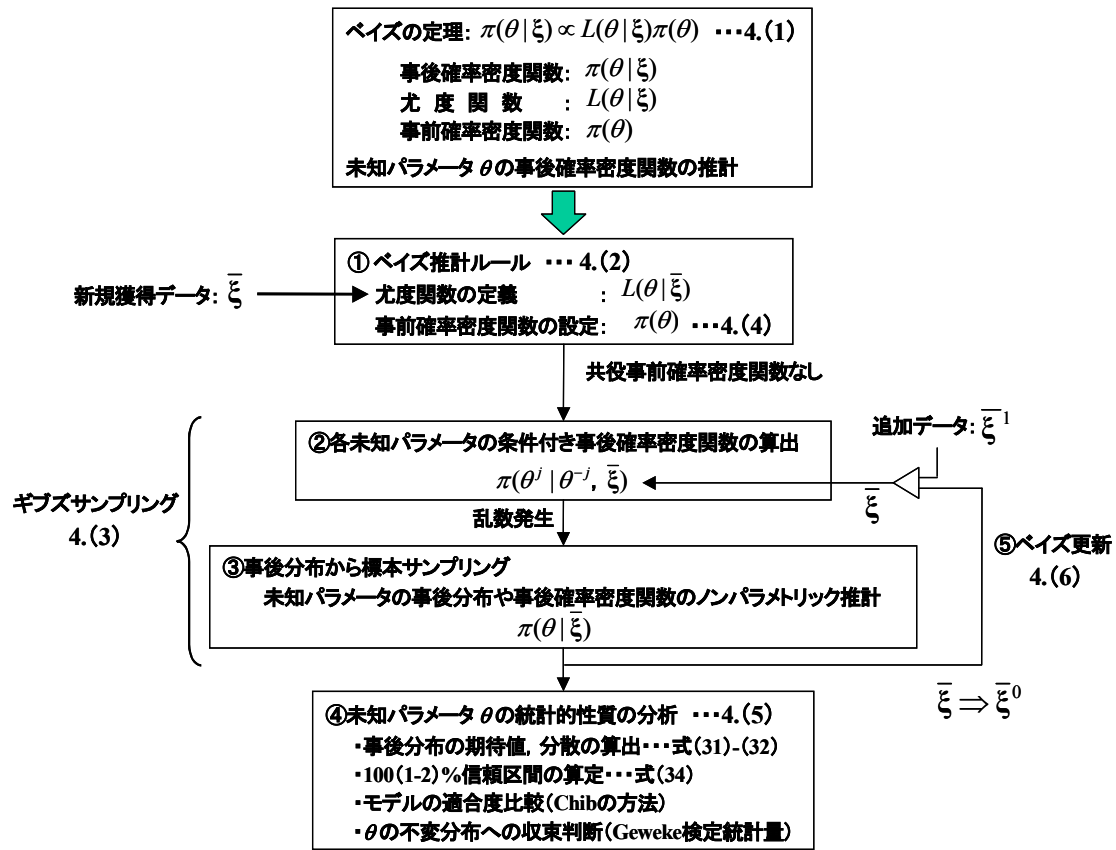


図-4 ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計

ラメータの事後分布を推計することになる。いま、尤度関数を $\mathcal{L}(\theta|\xi)$ と表そう。 θ は未知パラメータベクトル、 ξ は観測データを表す。ここで、 θ が確率変数で、事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ に従うと仮定しよう。この時、観測データ ξ を得たときに未知パラメータ θ の事後確率密度関数 $\pi(\theta|\xi)$ はベイズの定理より、

$$\pi(\theta|\xi) = \frac{\mathcal{L}(\theta|\xi)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta|\xi)\pi(\theta)d\theta} \quad (16)$$

と表すことができる。ただし、 Θ はパラメータ空間である。この時、 $\pi(\theta|\xi)$ は

$$\pi(\theta|\xi) \propto \mathcal{L}(\theta|\xi)\pi(\theta) \quad (17)$$

と表すことができる。 α は比例を意味する。ここに、分母

$$m(\xi) = \int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta|\xi)\pi(\theta)d\theta \quad (18)$$

は $\pi(\theta|\xi)$ の基準化定数、あるいは事前予測分布と呼ぶ。ベイズ推計は、1) 事前の経験情報などにに基づき、事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ を設定する。2) 新しく獲得したデータ ξ に基づいて尤度関数 $\mathcal{L}(\theta|\xi)$ を定義する。さらに、3) ベイズの定理(16)に基づいて事前確率密度関数を修正し、パラメータ θ に関する事後確率密度関数 $\pi(\theta|\xi)$ を得る。以上の手順を、以下ではベイズ推計ルールと呼ぶ。最尤推定法と異なり、未知パラメータ θ の確率分

布が、事後分布として求まる点にベイズ推計法の特徴がある。

以下ではワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法の具体的手順を述べる。また、読者の便宜を図るために、図-4にはその概要をフローとしてまとめる。同図中には、推計法の詳細を説明する節番号も明記したので、以降の各節と併せて参照されたい。

(2) ベイズ推計ルール

完全モニタリング情報を用いて、ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータ θ をベイズ推計ルールに基づき推計する方法を考える。新規に獲得したデータを $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ と表そう。完全モニタリング情報が入手可能な時、尤度関数(10)を、ワイブル劣化ハザードモデル(7a),(7b)を用いて具体的に書き表せば、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}) &= \prod_{i=1}^n f(\bar{y}_i, \bar{x}_i; \theta)^{\bar{d}_i} \cdot \tilde{F}(\bar{y}_i, \bar{x}_i; \theta)^{1-\bar{d}_i} \\ &= m^{\bar{d}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\bar{d}_i \bar{x}_i \beta' + \bar{d}_i (m-1) \ln \bar{y}_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp(\bar{x}_i \beta') \bar{y}_i^m \right) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

となる. ただし, \bar{d} はモニタリング期間中に寿命を迎えた施設数 $\bar{d} = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i$ を意味する. ワイブルハザードモデルにおいて $\theta = (m, \beta)$ が共に未知な場合, 尤度関数(19)に対して, 事前確率密度関数と事後確率密度関数の関数形が一致するような共役事前確率密度関数¹⁷⁾が存在しないことが知られている²⁸⁾. したがって, ベイズ推計ルールにおいて, 事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ と事後確率密度関数 $\pi(\theta|\xi)$ の関数形が, 互いに異ならざるを得ない. 事前分布の設定方法に関しては, 4.(4)で改めて議論するが, ここでは, m, β の事前確率密度関数が, それぞれベイズ統計学において標準的な事前確率密度関数として用いられるガンマ分布, 多次元正規分布に従うと仮定しよう. すなわち, $m \sim \mathcal{G}(m_0, \kappa_0)$, $\beta \sim \mathcal{N}_K(\mu_0, \Sigma_0)$ である. ただし, ガンマ分布 $\mathcal{G}(m_0, \kappa_0)$, K 次元正規分布 $\mathcal{N}_K(\mu_0, \Sigma_0)$ の確率密度関数は

$$f(m|m_0, \kappa_0) = \frac{1}{\Gamma(m_0)} \kappa_0^{m_0} m^{m_0-1} e^{-\kappa_0 m} \quad (20a)$$

$$g(\beta|\mu_0, \Sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K |\Sigma_0|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \mu_0) \right\} \quad (20b)$$

で与えられる. ただし, $\Gamma(m_0)$ はガンマ関数, μ_0 は $\mathcal{N}_K(\mu_0, \Sigma_0)$ の初期期待値ベクトル, Σ_0 は初期分散・共分散行列である. この時, 事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\xi})$ は, 式(17)より,

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\bar{\xi}) &\propto \mathcal{L}(\theta|\bar{\xi}) f(m|m_0, \kappa_0) g(\beta|\mu_0, \Sigma_0) \\ &\propto m^{m_0+\bar{d}-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\bar{d}_i \bar{x}_i \beta' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{d}_i (m-1) \ln \bar{y}_i - \exp(\bar{x}_i \beta') \bar{y}_i^m \right) - \kappa_0 m \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\beta - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \mu_0) \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

となる. しかし, 基準化定数

$$m(\bar{\xi}) = \int_{\Theta} \mathcal{L}(m, \beta|\bar{\xi}) f(m|m_0, \kappa_0) g(\beta|\mu_0, \Sigma_0) dm d\beta \quad (22)$$

を解析的に定義できず, 多重積分値を数値計算により求めざるを得ない. したがって, パラメータ θ の事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\xi})$ を明示的に求めることが不可能である. ただし, Θ はパラメータ $\theta = (m, \beta)$ の定義域である. 本研究では, パラメータの事後分布に関する統計量をMCMC法を用いて直接求める方法論を提案する. 以上の議論は, 完全モニタリング情報を用いた場合を想定していた. 同様に, 不完全モニタリング情報を用いた場合の尤度関数を定義することができる. その結果を, 表-1に一括して整理している.

(3) ギブスサンプリング

一般にハザードモデルの基準化定数は, 解析的に求めることが不可能であり, 実務への適用上に限界があっ

た. 近年, MCMC法³⁵⁾がベイズ統計学の分野に導入され, 多重数値積分により基準化定数を求めなくても, 効率的に事後分布を求めることが可能となった. その結果, ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる. すでに, MCMC法を用いたベイズ推計法に関して, いくつかの研究³⁵⁾が蓄積されている. 代表的なMCMC法として, ギブスサンプリング(Gibbs sampling)法, メトロポリス・ヘイスティングス(Metropolis-Hastings: MHと略す)法等が提案されている³⁵⁾. この内, ギブスサンプリングはもともと画像復元のアルゴリズム²⁹⁾として知られていたが, ベイズ推計法における事後分布推計に応用された³⁰⁾. ギブスサンプリング法は, 事後確率密度関数 $\pi(\theta|\xi)$ を直接求めることが難しい場合に, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて, 反復的にパラメータ θ のサンプルを乱数発生させることにより, 事後分布からの標本サンプルを獲得する方法である. なお, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数から容易にサンプルを発生させることができない場合には, MH法によりパラメータ値を推計することが必要となる. しかし, 本研究の場合, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数から容易にサンプルを発生させることができるため, ギブスサンプリング法を適用することとする. ギブスサンプリング法のアルゴリズムを説明するために, 再び観測データを $\bar{\xi}$, 未知パラメータを $\theta = (m, \beta)$ と表そう. この時, 式(21)より, β を既知とした時の m の条件付き事後確率密度関数 $\pi(m|\beta, \bar{\xi})$ は

$$\begin{aligned} \pi(m|\beta, \bar{\xi}) &\propto m^{\hat{m}_0-1} \exp(-\hat{\kappa}_0 m) \exp \left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m \right) \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \hat{m}_0 = m_0 + \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \\ \hat{\kappa}_0 = \kappa_0 - \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \ln \bar{y}_i \\ \gamma_i = \exp(\bar{x}_i \beta') \end{cases}$$

と表せる. つぎに, β から第 j ($j = 1, \dots, K$) 番目の要素 β^j を除いた未知パラメータベクトルを β^{-j} と表そう. この時, m と β^{-j} を既知とした β^j の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta^j|m, \beta^{-j}, \bar{\xi})$ は

$$\begin{aligned} \pi(\beta^j|m, \beta^{-j}, \bar{\xi}) &\propto \exp \left\{ -\frac{\rho_{jj}}{2} (\beta^j - \hat{\mu}_0^j)^2 \right\} \exp \left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m \right) \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_0^j = \mu_0^j + \frac{1}{\rho_{jj}} \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \bar{x}_i^j \right. \\ \quad \left. - \sum_{k=1, k \neq j}^K (\beta^k - \mu_0^k) \rho_{kj} \right\} \\ \gamma_i = \exp(\bar{x}_i \beta') \end{cases}$$

と表せる. ただし, μ_0^j は事前分布を表す多次元正規分布 $\mathcal{N}_K(\mu_0, \Sigma_0)$ の期待値ベクトル μ_0 の第 j 要素であり, ρ_{kj} は分散・共分散行列の逆行列 Σ_0^{-1} の第 (k, j) 要素で

表-1 モニタリングスキームとバイズ推計法

完全モニタリング情報		
尤度関数	$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} \bar{\xi}) = \prod_{i=1}^n f(\bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i : \boldsymbol{\theta})^{\bar{d}_i} \tilde{F}(\bar{y}_i, \bar{\mathbf{x}}_i : \boldsymbol{\theta})^{1-\bar{d}_i}$	
具体形	$m^{\bar{d}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\bar{d}_i \bar{\mathbf{x}}_i \boldsymbol{\beta}' + \bar{d}_i \cdot (m-1) \ln \bar{y}_i - \exp(\bar{\mathbf{x}}_i \boldsymbol{\beta}') \bar{y}_i^m \right) \right\}$	
事前分布	$m \sim \mathcal{G}(m_0, \kappa_0), \boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}_K(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$	Jeffreys型無情報事前分布
事後確率	$\propto m^{\hat{m}_0-1} \exp(-\hat{\kappa}_0 m) \exp \left(- \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m \right)$	$\propto m^{\bar{d}-1} \exp(-\bar{Y} m) \exp \left(- \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m \right)$
密度関数(m)		
事後確率	$\propto \exp \left\{ - \frac{\rho_{jj}}{2} (\beta^j - \hat{\mu}_0^j)^2 \right\} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m \right)$	$\propto \exp(\bar{D}^j \beta^j) \exp \left(- \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m \right)$
密度関数($\boldsymbol{\beta}^j$)		
不完全モニタリング情報		
尤度関数	$\mathcal{L}^f(\boldsymbol{\theta} \bar{\xi}) = \prod_{i=1}^n \hat{F}(\bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i : \boldsymbol{\theta})^{\bar{d}_i^f} \left\{ 1 - \hat{F}(\bar{W}_i, \bar{T}_i, \bar{\mathbf{x}}_i : \boldsymbol{\theta}) \right\}^{1-\bar{d}_i^f}$	
具体形	$\exp \left(- \sum_{i=1}^n \exp(\bar{\mathbf{x}}_i \boldsymbol{\beta}') \bar{T}_i^m \right) \cdot \prod_{i=1}^n \left\{ \exp \left(- (\bar{W}_i^m - \bar{T}_i^m) \exp(\bar{\mathbf{x}}_i \boldsymbol{\beta}') \right) - 1 \right\}^{\bar{d}_i^f}$	
事前分布	$m \sim \mathcal{G}(m_0, \kappa_0), \boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}_K(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$	Jeffreys型無情報事前分布
事後確率	$\propto \mathcal{L}^f(\boldsymbol{\theta} \bar{\xi}) m^{\hat{m}_0-1} \exp(-\hat{\kappa}_0 m)$	$\propto m^{-1} \mathcal{L}^f(\boldsymbol{\theta} \bar{\xi})$
密度関数(m)		
事後確率	$\propto \mathcal{L}^f(\boldsymbol{\theta} \bar{\xi}) \exp \left\{ - \frac{\rho_{jj}}{2} (\beta^j - \hat{\mu}_0^j)^2 \right\}$	$\propto \mathcal{L}^f(\boldsymbol{\theta} \bar{\xi})$
密度関数($\boldsymbol{\beta}^j$)		

注) ただし, $\bar{D}^j = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i x_i^j$, $\bar{Y} = - \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \ln \bar{y}_i$, $\hat{m}_0 = m_0 + \bar{d}$, $\hat{\kappa}_0 = \kappa_0 + \bar{Y}$, $\gamma_i = \exp(\bar{\mathbf{x}}_i \boldsymbol{\beta}')$, $\hat{\mu}_0^j = \mu_0^j + \frac{1}{\rho_{jj}} \left\{ \bar{D}^j - \sum_{k=1, \neq j}^K (\beta^k - \mu_0^k) \rho_{kj} \right\}$, $\hat{\mu}_0^j = \mu_0^j - \frac{1}{\rho_{jj}} \left\{ \sum_{k=1, \neq j}^K (\beta^k - \mu_0^k) \rho_{kj} \right\}$

ある. また $\sum_{k=1, \neq j}^K$ は, 要素1から K のうち, 要素 j を除いたものの総和を意味する. この時, ギブスサンプリング・アルゴリズムを以下のように整理できる.

- step 1) : 初期パラメータ値 $\boldsymbol{\theta}^0 = (m(0), \beta^1(0), \dots, \beta^K(0))$ を与える. $i = 0$ とし, サンプル数 \bar{n} を設定する.
- step 2) : $\boldsymbol{\theta}^{i+1} = (m(i+1), \beta^1(i+1), \dots, \beta^K(i+1))$ を次のように発生する.

- $m(i+1)$ を $\pi(m|\boldsymbol{\beta}(i), \bar{\xi})$ から乱数発生させる.
- $\beta^1(i+1)$ を $\pi(\beta^1|m(i+1), \boldsymbol{\beta}^{-1}(i), \bar{\xi})$ から乱数発生させる.
- $\beta^k(i+1)$ を $\pi(\beta^k|m(i+1), \beta^1(i+1), \dots, \beta^{k-1}(i+1), \beta^{k+1}(i), \dots, \beta^K(i), \bar{\xi})$ から乱数発生させる.
- $(k = 2, \dots, K-1)$
- $\beta^K(i+1)$ を $\pi(\beta^K|m(i+1), \boldsymbol{\beta}^{-K}(i+1), \bar{\xi})$ から乱数発生させる.

- step 3) : 十分大きな \bar{n} に対して $i \geq \bar{n}$ ならば $\boldsymbol{\theta}^{i+1}$ を記録する.
 - step 4) : $i = \bar{n}$ ならば計算終了. $i < \bar{n}$ ならば $i = i+1$ として step 2) に戻る.
- 以上のギブスサンプリングにおいて, 推移核

$$\begin{aligned}
 & K(\boldsymbol{\theta}^i, \boldsymbol{\theta}^{i+1}|\bar{\xi}) \\
 & K(\boldsymbol{\theta}^i, \boldsymbol{\theta}^{i+1}|\bar{\xi}) \\
 & = \pi(m(i+1)|\boldsymbol{\beta}(i), \bar{\xi}) \prod_{j=1}^{K-1} \pi(\beta^j(i+1)|m(i+1), \\
 & \beta^1(i+1), \dots, \beta^{j-1}(i+1), \beta^{j+1}(i), \dots, \beta^K(i), \bar{\xi}) \\
 & \cdot \pi(\beta^K(i+1)|m(i+1), \boldsymbol{\beta}^{-K}(i+1), \bar{\xi}) \quad (25)
 \end{aligned}$$

と定義しよう. この時, $\boldsymbol{\theta}^i$ ($i = 0, 1, \dots$) は推移核 $K(\boldsymbol{\theta}^i, \boldsymbol{\theta}^{i+1}|\bar{\xi})$ を持つマルコフ連鎖である. さらに, このマルコフ連鎖の定常状態を $\pi(\boldsymbol{\theta}|\bar{\xi})$ と表そう. 十分大きな \bar{n} に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に到達していると考えれば, ギブスサンプリングで求めた $\boldsymbol{\theta}^i$ ($i = \bar{n}+1, \bar{n}+2, \dots, \bar{n}$) は, 事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\bar{\xi})$ からの標本サンプルと見なすことができる. これらの標本サンプルを用いて, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事後分布に関する各種の統計量を計算することができる. なお, ギブスサンプリングを行うためには $K+1$ 個の条件付き事後確率密度関数 $\pi(m|\boldsymbol{\beta}, \bar{\xi})$, $\pi(\beta^j|m, \boldsymbol{\beta}^{-j}, \bar{\xi})$ ($j = 1, \dots, K$) を求めることが必要となる. 以上の議論は, 完全モニタリング情報を用いた場合を想定していた. 同様に, 不完全モニタリング情報を用いた場合の条件付き事後確率密度関数を定義することができる. その結果も, 表-1 に併記している. なお, 式(23), (24) を m, β^j ($j = 1, \dots, K$) の関数とみなした時, $\ln[\pi(m|\boldsymbol{\beta}, \bar{\xi})]$,

$\ln[\pi(\beta^j|m, \beta^{-j}, \xi)]$ ($j = 1, \dots, K$) はいずれも凹関数である. このように対数事後確率密度関数が凹関数となる場合, 事後分布から標本を効率的にサンプリングするために適応的棄却サンプリング³¹⁾(ARS)が有効である. 本研究でも, 式(23), (24)から, 事後分布のパラメータ θ の標本サンプリングを求めるためにARSを用いることとした.

(4) 事前分布の設定

ワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推計する場合に, 技術者が有する事前情報を, 事前分布として表現することが必要である. 前述したように, ワイブル劣化ハザードモデルの場合, 事前分布と事後分布の関数形が等しくなるような共役事前分布は存在しない. したがって, 先験的に与える事前分布は, 未知パラメータの真の確率分布を表すのではなく, 過去の推計結果や技術者の技術情報を表現するための道具と考えることができる. 本研究では, ワイブル劣化ハザードモデルの未知パラメータ m, β の事前確率密度関数が, $m \sim \mathcal{G}(m_0, \kappa_0), \beta \sim \mathcal{N}_K(\mu_0, \Sigma_0)$ に従って分布する場合を想定している. このように比較的単純な事前確率密度関数を想定することにより, 先験的知識を事前分布として比較的容易に表現することが可能となる.

利用可能な事前情報として多様なケースが想定される. たとえば, 1) すでに利用可能な既存のワイブル劣化ハザードモデルが存在する場合 (Case a), 2) 参照となる類似のワイブル劣化ハザードモデルが存在する場合 (Case b), 3) 利用可能なワイブル劣化ハザードモデルは存在しないが, 技術者が主観的に判断できる場合 (Case c), 4) 参照となる事前情報がまったく存在しない場合等 (Case d) が考えられる. Case aは, 過去にワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推計した結果が存在する場合や, 他のデータベースに対してベイズ推計した結果を初期モデルとして採用できる場合が該当する. この場合には, 表-2に示すように, パラメータ m の期待値 $\mu_0(m)$ と分散 $\sigma^2(m)$, およびパラメータベクトル β の期待値 μ_0 と分散・共分散行列 Σ_0 に関する情報を活用することができる. Case bは, パラメータ値に関する情報は存在するが, その分散, 共分散に関する情報が利用できない場合である. さらに, Case cでは, 参照になるモデルは存在しないが, 技術者が経験から平均的な施設寿命等の情報を有する場合である. このような経験的情報から, パラメータ値 m, β の初期値を設定する方法に関しては, のちに 5.(3) で言及する. 最後に, Case dは参考になる情報がまったく存在しない場合である. このようにパラメータ m, β の期待値, 分散に関する情報が存在しない場合, 1) 分散

が十分に大きい事前分布

$$m \sim \mathcal{G}(1, \kappa_m^{-1}) \tag{26a}$$

$$\beta \sim \mathcal{N}_K(\mathbf{O}, \kappa_\beta \mathbf{I}) \tag{26b}$$

を用いることが可能である²⁸⁾. ただし, κ_m, κ_β は十分大きい正数である. また, \mathbf{O} はすべての要素が 0 であるゼロベクトル, \mathbf{I} は単位行列を表す. あるいは, 2) Jeffreys型無情報事前分布³⁶⁾

$$f(m) \propto m^{-1} \tag{27a}$$

$$g(\beta^j) \propto \tilde{\beta}^j \tag{27b}$$

を利用することができる. ただし, $\tilde{\beta}^j$ は $-\infty < \tilde{\beta}^j < \infty$, を満足する任意定数である. のちに, 5.(2) では初期事前分布 (26a),(26b) を用いた場合を, 5.(3) では, Jeffreys型無情報事前分布を用いた適用事例を示すこととする.

なお, Jeffreys型無情報事前分布は定義区間上で積分しても 1 にならないので非正則な事前分布と呼ばれる. 非正則な事前分布は確率密度関数ではないが, 非正則な事前分布 (27a),(27b) を用いてベイズ推計ルールにより事後分布を求めることができる^{35),36)}. すなわち, Jeffreys型無情報事前分布を用いた場合, ギブスサンプリングにおける条件付き事後確率密度関数は

$$\begin{aligned} &\pi(m|\beta, \xi) \\ &\propto m^{\bar{d}-1} \exp(-\bar{Y}m) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m\right) \end{aligned} \tag{28a}$$

$$\begin{aligned} &\pi(\beta^j|m, \beta^{-j}, \xi) \\ &\propto \exp(\bar{D}^j \beta^j) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{x}_i^j\right) \end{aligned} \tag{28b}$$

$$\begin{cases} \bar{Y} = -\sum_{i=1}^n \bar{d}_i \ln \bar{y}_i \\ \bar{D}^j = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i \bar{x}_i^j \end{cases}$$

と表される. 式(28a),(28b)は両辺の比例関係を表すため, これらの式の右辺から Jeffreys型無情報パラメータ $\tilde{\beta}^j$ は消去されている. このように獲得可能な事前情報のタイプによって, ギブスサンプリングにおいて用いる条件付き事後確率密度関数が異なる. さらに, 以上の議論は完全モニタリング情報を対象としたものであるが, 表-1には, 不完全モニタリング情報と無情報事前分布を用いて導出した条件付き事後確率密度関数を一括して示している.

(5) 事後分布に関する統計量

MCMC法によって得られた標本に基づいて, パラメータ θ に関する統計的性質を分析することができる. MCMC法を用いた場合, パラメータの事後確率密度関数 $\pi(\theta|\xi)$ を解析的な関数として表現することはできない. 得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推計することとなる. いま, ギブスサ

表-2 事前情報のタイプ

	Case a	Case b	Case c	Case d
$\mu_0(m)$	○	○	○	×
$\sigma_0(m)$	○	×	×	×
μ_0	○	○	△	×
Σ_0	○	×	×	×

注) ○印は事前分布のパラメータに関する情報が利用可能であることを, △印は β^1 の期待値 μ_0^1 に関する情報のみが利用可能であることを表す. ×印は利用可能でないことを表す. また, $\mu(m)$, $\sigma(m)$ はパラメータ m の平均, 分散を表す. また, μ_0 , Σ_0 はパラメータベクトル β の平均ベクトル, 分散・共分散行列を表す.

ンプリングから得られた標本を $\theta^k = (m(k), \beta(k))$ ($k = 1, \dots, \bar{n}$)と表そう. ただし, $\beta(k) = (\beta^1(k), \dots, \beta^K(k))$ である. この内, 最初の \underline{n} 個の標本はギブスサンプリングの収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去しよう. その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義しよう. この時, パラメータ m に関する周辺確率分布関数 $F(m)$ は

$$F(m) = \frac{\#\{m(k) \leq m, k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (29)$$

と表すことができる. ただし, $\#\{m(k) \leq m, k \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\{m(k) \leq m, k \in \mathcal{M}\}$ が成立するサンプルの総数である. 同様に, パラメータ β の同時生起分布関数 $G(\beta)$ も

$$G(\beta) = \frac{\#\{\beta(k) \leq \beta, k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (30)$$

と表すことができる. また, パラメータ m の事後分布の平均 $\tilde{\mu}(m)$, 分散 $\tilde{\sigma}^2(m)$ は標本平均, 標本分散を用いて表される. すなわち,

$$\tilde{\mu}(m) = \sum_{k=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{m(k)}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (31a)$$

$$\tilde{\sigma}^2(m) = \sum_{k=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{m(k) - \tilde{\mu}(m)\}^2}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (31b)$$

と表される. また, パラメータ β の期待値ベクトル $\tilde{\mu}(\beta)$, 分散・共分散行列 $\tilde{\Sigma}(\beta)$ は, それぞれ

$$\tilde{\mu}(\beta) = \left(\sum_{k=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta^1(k)}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{k=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\beta^K(k)}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \quad (32a)$$

$$\tilde{\Sigma}(\beta) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta^1) & \dots & \tilde{\sigma}(\beta^1\beta^K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta^K\beta^1) & \dots & \tilde{\sigma}^2(\beta^K) \end{pmatrix} \quad (32b)$$

と表される. ただし,

$$\tilde{\sigma}^2(\beta^j) = \sum_{k=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta^j(k) - \tilde{\mu}(\beta^j)\}^2}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (33a)$$

$$\tilde{\sigma}(\beta^i\beta^j) = \sum_{k=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\beta^i(k) - \tilde{\mu}(\beta^i)\}\{\beta^j(k) - \tilde{\mu}(\beta^j)\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (33b)$$

である. $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼区間に関しては, 標本順序統計量 $(\underline{m}_\alpha, \bar{m}_\alpha)$, $(\underline{\beta}_\alpha^j, \bar{\beta}_\alpha^j)$ ($j = 1, \dots, K$)

$$\underline{m}_\alpha = \arg \max_{m(k^*)} \left\{ \frac{\#\{m(k) \leq m(k^*), k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \alpha \right\} \quad (34a)$$

$$\bar{m}_\alpha = \arg \min_{m(k^{**})} \left\{ \frac{\#\{m(k) \geq m(k^{**}), k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \alpha \right\} \quad (34b)$$

$$\underline{\beta}_\alpha^j = \arg \max_{\beta^j(k^*)} \left\{ \frac{\#\{\beta^j(k) \leq \beta^j(k^*), k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \alpha \right\} \quad (34c)$$

$$\bar{\beta}_\alpha^j = \arg \min_{\beta^j(k^{**})} \left\{ \frac{\#\{\beta^j(k) \geq \beta^j(k^{**}), k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \alpha \right\} \quad (34d)$$

を用いて $\underline{m}_\alpha < m < \bar{m}_\alpha$, $\underline{\beta}_\alpha^j < \beta^j < \bar{\beta}_\alpha^j$ と定義できる. ベイズ推計法では, パラメータが事後分布として与えられる. このため, 通常の推計法を用いた場合のように, モデルや推定量の検定統計量を用いて, モデルの推計精度を検討するという方法は採用されない. ベイズ推計法においては, いくつかのモデルの候補の中から, もっともデータに適合するモデルを選択するために周辺尤度³⁶⁾が用いられる. いま, 複数のモデル a ($a = 1, \dots, A$)の中から, もっとも優れたモデルを選択する問題を考えよう. 事前分布が正則な場合, モデル a の周辺尤度 $S_a(\bar{\xi})$ は

$$S_a(\bar{\xi}) = \int \tilde{\mathcal{L}}_a(\bar{\xi}|\theta) \pi_a(\theta) d\theta \quad (35)$$

と定義できる. ただし, $\tilde{\mathcal{L}}_a(\bar{\xi}|\theta)$ はパラメータベクトル θ の下で観測値 $\bar{\xi}$ に関する確率密度関数を表し, 尤度関数 $\tilde{\mathcal{L}}(\theta|\bar{\xi})$ を $\bar{\xi}$ に関する確率密度関数と解釈することにより得られる. また, π_a はモデル a を用いた場合の事前確率密度関数を表す. 周辺尤度は, 想定されたモデルから観測値 $\bar{\xi}$ の値の出現の度合いを表す指標である. 周辺尤度の計算方法として種々提案されているが, ギブスサンプリングを用いる場合にはChib³⁷⁾の方法が優れているという報告がある³⁸⁾. 本研究の適用事例ではChibの方法を用いるが, その概要については付録を参照して欲しい. Chibの方法を適用するためには, すべてのパラメータに関する事後確率密度を計算する必要がある. ワイブル劣化ハザードモデルの事後確率密度関数(23), (24)は

表-3 ベイズ判断基準

$\log_{10} B_{aa'}$	判断結果
0-0.5	証拠があまりあるとは言えない
0.5-1	証拠が十分にある
1-2	証拠が強い
2- ∞	証拠が決定的である

$$\pi(m|\beta, \bar{\xi}) = \frac{m^{\hat{m}_0-1} \exp(-\hat{\kappa}_0 m) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^m\right)}{\int_0^\infty t^{\hat{m}_0-1} \exp(-\hat{\kappa}_0 t) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{y}_i^t\right) dt} \quad (36a)$$

$$\pi(\beta_j|m, \beta_{-j}, \bar{\xi}) = \frac{\exp\left\{-\frac{\rho_{jj}}{2}(\beta^j - \hat{\mu}_0^j)^2\right\} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i(\beta_j) \bar{y}_i^m\right)}{\int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{\rho_{jj}}{2}(t - \hat{\mu}_0^j)^2\right\} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \gamma_i(t) \bar{y}_i^m\right) dt} \quad (36b)$$

となる。式(36b)において、 γ_i が β^j の関数であることを明示的に示すために、 $\gamma_i(\beta^j)$ とした。事後確率密度を求めるためには、式(36a),(36b)の分母を数値積分により求めることが必要となる。また、2つのモデル a と a' のデータへの適合度を比較するために用いられるベイズファクター $B_{aa'}$ は、

$$B_{aa'} = \frac{S_a(\bar{\xi})}{S_{a'}(\bar{\xi})} \quad (37)$$

で与えられる。Jeffreysはモデル a がモデル a' より支持されるかどうかに関する判断に対して、表-3に示すようなガイドラインを提案している。

MCMC法では、初期値 θ^0 が不変分布である事後分布からの標本である保証はない。いま、ギブスサンプリングを合計 \bar{n} 回繰り返した場合を考えよう。 \bar{n} 個のサンプルの内、最初の \underline{n} 個の標本 θ^k ($k = 1, \dots, \underline{n}$)を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える。その上で、第 $\underline{n} + 1$ 回以降の標本をとりあげよう。 $\underline{n} + 1$ 以降の標本が、不変分布である事後分布からの標本であるかどうかをGewekeの方法³⁹⁾により仮説検定しよう。いま、パラメータのギブス標本 $\theta^k = (m(k), \beta^1(k), \dots, \beta^K(k))$ ($k = \underline{n} + 1, \dots, \bar{n}$)の中から、最初の n_1 個と最後の n_2 個のデータをとりあげよう。この時、パラメータ m の不変分布への収束を判断するためのGeweke検定統計量は、

$$Z_m = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{\sqrt{\nu_1(m)^2 + \nu_2(m)^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (38)$$

$$\bar{m}_1 = \frac{\sum_{k=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} m(k)}{n_1} \quad \bar{m}_2 = \frac{\sum_{k=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} m(k)}{n_2}$$

$$\nu_1^2(m) = \frac{2\pi \hat{f}_m^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(m) = \frac{2\pi \hat{f}_m^2(0)}{n_2}$$

と定義できる。ただし、 $f_m^i(x)$ ($i = 1, 2$)はスペクトル密度関数であり、 $2\pi \hat{f}_m^i(0)$ の推定値は

$$2\pi \hat{f}_m^i(0) = \hat{\omega}_0^i + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) \hat{\omega}_j^i \quad (39)$$

$$\hat{\omega}_j^1 = n_1^{-1} \sum_{g=\underline{n}+s+1}^{\underline{n}+n_1} (m(g) - \bar{m}_1)(m(g-s) - \bar{m}_1)$$

$$\hat{\omega}_j^2 = n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+s+1}^{\bar{n}} (m(g) - \bar{m}_2)(m(g-s) - \bar{m}_2)$$

$$w(s, q) = 1 - \frac{s}{q+1}$$

として求まる^{37),40)}。同様に、パラメータ β^j ($j = 1, \dots, K$)に関するGeweke検定統計量を

$$Z_{\beta^j} = \frac{\bar{\beta}_1^j - \bar{\beta}_2^j}{\sqrt{\nu_1(\beta^j)^2 + \nu_2(\beta^j)^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (40)$$

$$\bar{\beta}_1^j = \frac{\sum_{k=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} \beta^j(k)}{n_1} \quad \bar{\beta}_2^j = \frac{\sum_{k=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} \beta^j(k)}{n_2}$$

$$\nu_1^2(\beta^j) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta^j}^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(\beta^j) = \frac{2\pi \hat{f}_{\beta^j}^2(0)}{n_2}$$

と定義する。ここで、加速度パラメータ m の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_m| \leq z_{\alpha/2} \\ H_1 : |Z_m| > z_{\alpha/2} \end{cases} \quad (41)$$

と設定しよう。ただし、 $z_{\alpha/2}$ は帰無仮説を棄却するための臨界的な値である。有意水準 $\alpha\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合、 $z_{\alpha/2}$ は $\alpha/2\% = 1 - \Phi(z_{\alpha/2})$ を満足する値として定義できる。ただし、 $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である。同様に、 β^j ($j = 1, \dots, K$)に関する、仮説検定を行うことができる。

(6) ベイズ更新ルール

ベイズ推計において、事前分布と事後分布が同一の関数形を持つような共役事前分布が存在する場合、新しく獲得した追加データを用いて、未知パラメータのベイズ推計値を容易に更新することができる。残念ながら、ワイブル劣化ハザード関数の場合、共役事前分布が存在しないことが知られている。このため、ベイズ更新を実施するためには、モデルの推計に用いる過去の点検データをすべて蓄積しておかなければならない。

いま、ベイズ更新の方法を説明するために、第1回目の点検データ $\bar{\xi}^0$ を用いてワイブル劣化ハザードモデルの未知パラメータに関する事後分布(21)が求まった場合を考えよう。その上で、第2回目の点検データ $\bar{\xi}^1$ を用いて、未知パラメータの事後分布を更新する問題を考えよう。さらに、第1回目の点検データ $\bar{\xi}^0 = (\bar{d}_i, \bar{y}_i, \bar{x}_i)$ ($i = 1, \dots, n_1$)と第2回目の点検データ $\bar{\xi}^1 = (\bar{d}_i, \bar{y}_i, \bar{x}_i)$ ($i =$

$n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ をプールしたデータベースを定義する. 第1回目のベイズ推計における未知パラメータベクトルの事後確率密度関数を $\pi(\theta|\xi^0)$ とすれば, ベイズ更新を行った後の未知パラメータベクトルの事後確率密度関数 $\pi(\theta|\xi^0, \xi^1)$ は

$$\pi(\theta|\xi^0, \xi^1) \propto \mathcal{L}(\theta|\xi^1)\pi(\theta|\xi^0) \propto \mathcal{L}(\theta|\xi^0, \xi^1)f(m|m_0, \kappa_0)g(\beta|\mu_0, \Sigma_0) \quad (42)$$

と表すことができる. ここに, $\mathcal{L}(\theta|\xi^0, \xi^1)$ は, 第1回目と第2回目の点検データをプールしたデータベースを用いて定義される尤度関数である. 一方, $f(m|m_0, \kappa_0), g(\beta|\mu_0, \Sigma_0)$ は, それぞれ第1回目のベイズ推計時に用いた m, β の事前分布である. したがって, ベイズ更新後の事後分布は

$$\pi(\theta|\xi^0, \xi^1) \propto m^{\hat{m}_1-1} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (\bar{d}_i \bar{x}_i \beta' + \bar{d}_i(m-1) \ln \bar{y}_i - \exp(\bar{x}_i \beta') \bar{y}_i^m) - \kappa_0 m - \frac{1}{2}(\beta - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \mu_0) \right\} \quad (43)$$

となる. ただし, $\hat{m}_1 = m_0 + \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \bar{d}_i$ である. すなわち, 式(43)より明らかのように, 未知パラメータの事後分布を更新するためには, 新しい点検データを追加したデータベースに対して尤度関数を定義し, ギブスサンプリングにより事後分布を新しく求めることが必要となる. なお, 拡張したデータベースに対してギブスサンプリングを行う際に用いる m の条件付き事後確率密度関数 $\pi(m|\beta, \xi^0, \xi^1)$ は, 次式で表される.

$$\pi(m|\beta, \xi^0, \xi^1) \propto m^{\hat{m}_1-1} \exp(-\hat{\kappa}_1 m) \exp \left(- \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \gamma_i \bar{y}_i^m \right) \quad (44)$$

$$\begin{cases} \hat{\kappa}_1 = \kappa_0 - \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \bar{d}_i \ln \bar{y}_i \\ \gamma_i = \exp(\bar{x}_i \beta') \end{cases}$$

さらに, β^j の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta^j|m, \beta^{-j}, \xi^0, \xi^1)$ は

$$\pi(\beta^j|m, \beta^{-j}, \xi^0, \xi^1) \propto \exp \left\{ - \frac{\rho_{jj}}{2} (\beta^j - \hat{\mu}_1^j)^2 \right\} \exp \left(- \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \gamma_i \bar{y}_i^m \right) \quad (45)$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1^j = \mu_0^j + \frac{1}{\rho_{jj}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \bar{d}_i \bar{x}_i^j - \sum_{k=1, k \neq j}^K (\beta^k - \mu_0^k) \rho_{kj} \right\} \\ \gamma_i = \exp(\bar{x}_i \beta') \end{cases}$$

と表せる. なお, 無情報事前分布を用いた場合も同様に, 新しいデータを追加したデータベースに対して尤度関数を定義することにより, ギブスサンプリングより未知パラメータの事後分布を更新することができる.

5. 適用事例

(1) 適用事例の概要

本研究で取り扱うワイブル劣化ハザードモデルは, 劣化状態が故障の有無という2値で表現される施設を対象とする. さらに, データ量がベイズ推計精度に及ばず影響を検証するためには, 長年に亘り点検データが蓄積されている施設が望ましい. このような観点から, 本研究ではトンネル照明ランプの不点の履歴に関する点検データに着目する. なお, 橋梁や舗装といった一般的な土木施設は, その劣化状態が複数ランクで評価されるために, 多段階指数劣化ハザードモデル⁴⁾や多段階ワイブル劣化ハザードモデル⁵⁾のベイズ推計法を開発する必要となる. これらのモデルのベイズ推計については, 本研究の範囲を逸脱するため, 機会を改めて発表したいと考える.

東日本高速道路(株)が管理する東北自動車道十和田道路事務所管内のトンネル照明不点履歴データに基づいて, ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計を試みよう. 適用事例としてとりあげるデータベースは, トンネル照明に関する十分なモニタリング情報を有している. 同データベースに関しては参考文献1)で詳細に議論しているが, 読者の便宜を図るためにその概要を説明しておく. 同事務所が整備しているデータベースでは, 1983年から1995年に至る12年間にわたってトンネル照明の使用開始日と不点となった日に関する情報が獲得できる. その結果, トンネル照明寿命に関する完全モニタリング情報を獲得することができる. 同道では, トンネル照明用光源として, 低圧ナトリウム灯及び高圧ナトリウム灯の2タイプが設置されている. さらに, トンネル照明の種類は, 基本照明と緩和照明に分類される. 照明の種類により1日当たりの平均点灯時間が異なる. 総サンプル数は7,145個である. 完全モニタリング情報の場合, 各ランプの寿命に関する情報が利用可能である. 対象とするデータベースにおいて, 施設寿命が観測されている完全サンプル数は4,348個あり, モニタリング終了時の1995年時点で故障が観測されなかった不完全サンプル数は2,797個である. 現実には, このように豊富なサンプルを有するデータベースが利用可能な場合はそれほど多くない. そこで, このようなデータベースから標本をサンプリングした2次データベースを作成し, 本研究で提案したベイズ推計法の有効性について実証的に検証することとする. 5.(2)では, 12年間分の履歴データが整備されているデータベース(以下, 完全モニタリングデータベースと呼ぶ)から, データをランダムサンプリングしたデータベースを人為的に再構成し, 履歴データが蓄積されていくに従って, モデルの推計精度がどのように変化するか

表-4 推計結果

ベイズ推定法		最尤推定法			
推計パラメータ		Geweke 検定統計量	推計パラメータ		t 値
$\hat{\mu}(m)$	1.44	$Z_m = 0.33$	\hat{m}	1.44	80.95
$\hat{\mu}(\beta^1)$	-4.44	$Z_{\beta^1} = 0.42$	$\hat{\beta}^1$	-4.44	-72.30
$\hat{\mu}(\beta^2)$	0.20	$Z_{\beta^2} = 0.26$	$\hat{\beta}^2$	0.20	6.48
$\hat{\mu}(\beta^3)$	0.015	$Z_{\beta^3} = 0.27$	$\hat{\beta}^3$	0.014	6.78

について分析する。つぎに、5.(3)では、事前分布の種類がベイズ推計の精度に及ぼす影響を分析する。5.(4)では、完全モニタリングデータベースから定期モニタリングデータベースを人為的に作成する。その上で、モニタリング情報の不完全性に起因して、ワイブル劣化ハザードモデルの推計精度がどのように変化するかを分析する。最後に、5.(5)で今後のモニタリングスキームへの改善への示唆をとりまとめる。

(2) ベンチマークモデルのベイズ推計

ベイズ推計で用いるワイブル劣化ハザード関数を

$$\lambda_i(y_i) = \exp(\beta^1 + \beta^2 x_i^2 + \beta^3 x_i^3) m y_i^{m-1} \quad (46)$$

と特定化する。ここに、 y_i はランプ i ($i = 1, \dots, n$)の寿命である。また、説明変数 x_i^2, x_i^3 は、それぞれ

$$x_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{低圧ナトリウムランプ} \\ 0 & \text{高圧ナトリウムランプ} \end{cases}$$

$$x_i^3 = \text{照明種類別の日平均点灯時間 (時間/日)}$$

である。説明変数の設定には、上記の説明変数の他に、点灯回数、ランプのトンネル内の位置に関する説明変数を取り上げた。しかし、これらの説明変数を考慮したモデルに対して、1) 推計パラメータの符号条件、2) 表-2に基づくベイズファクター(37)の改善度、3) 推計パラメータの100(1-2 α)%信頼区間の幅(34)の広さに基づいて現行モデルとの比較を行ったが、モデルの有意性を確認できなかった。したがって、以降の適用事例ではワイブル劣化ハザード関数(46)を用いて議論を進める。なお、他の土木施設を対象とした場合であっても、同様の手順により説明変数を設定することでワイブル劣化ハザード関数を特定することが可能である。

表-4には、Jeffreys型無情報事前分布(27a),(27b)と完全モニタリングデータベースを用いて、ワイブル劣化ハザードモデルを推定した結果(パラメータの標本平均)を示している。さらに、Geweke 検定統計量(38),(40)も同表に示している。ギブスサンプリングを実施する際に、マルコフ連鎖が定常状態に到達するためのサンプル数として $n = 2,000$ を設定した。表-4に示すとおり、Geweke 検定統計量はいずれも1.96を下回っており、有意水準5%で収束仮説を棄却できないことが分かる。以後の計算でも $\bar{n} = 12,000$ と設定し、パラメータ標本

を抽出した。なお、比較のため、完全モニタリングデータベースを用いて、ワイブル劣化ハザードモデルを最尤推定法により推計した結果も表-4に併記している。最尤推定法による推計方法に関しては、参考文献1)を参照して欲しい。すべてのパラメータに関する事前分布の確率密度関数が、その定義域において正の値をとり、かつ滑らかな場合、事後分布は最尤推定量を平均とし、フィッシャー情報量の逆数を分散とする正規分布に漸近する⁴¹⁾。表-4に示すように、完全モニタリングデータベースを用いた場合、パラメータの標本平均が最尤推定量と等しくなっており、ギブスサンプリングにより、最尤推定量を十分に近似できることが分かる。

しかし、現実には、このように豊富なサンプルを有するデータベースが利用可能な場合はそれほど多くない。そこで、分析対象とする完全モニタリングデータベースから、以下の手続きで2次データベースを作成し、ベイズ推計による推計精度を検討することとした。まず、現データベースから無作為非復元抽出によって得られた200個の履歴データベースを D_{200} とする。さらに、現データベースから追加的に無作為非復元抽出を行い、新たに得られた200個の履歴データと D_{200} を合わせた計400個の履歴データベースを D_{400} とする。同様にして、 $D_{600}, D_{800}, D_{1000}$ の履歴データベースを作成する。以上の合計5個の2次データベースに基づいて、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ更新を試みる。ベンチマークケースとして、初期時点における事前分布を、分散が十分に大きい事前分布(26a)(26b)を用いて

$$m \sim \mathcal{G}(1, 0.001) \quad (47a)$$

$$\beta \sim \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, 10000\mathbf{I}) \quad (47b)$$

と設定しよう。ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ更新の手順は以下に示すとおりである。すなわち、1) 初期事前分布(20a),(20b)とデータベース D_{200} を用いて、条件付き事後確率密度関数(23),(24)を用いて定義する。2) 条件付き事後確率密度関数(23),(24)を用いてギブスサンプリングによりパラメータ標本を発生させる。3) 発生したパラメータ標本を用いて、パラメータ平均と分散・共分散(31a),(31b),(32a),(32b)を算定する。4) 新しい履歴データを追加したデータベース D_{400} を用いて定義された尤度関数を用いて、条件付き事後確率密度関数(44),(45)を定義する。5) 条件付き事後確率密度関数(44),(45)を用いてギブスサンプリングによりパラメータ標本を発生させる。6) 以上の方法をデータベース $D_{200} \sim D_{1000}$ に対して繰り返すことにより、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ更新を試みた。表-5には、データベース $D_{200} \sim D_{1000}$ に対して、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ更新を逐次繰り返した結果を示している。

表-5 ワイブル劣化ハザードモデルのバイズ更新結果

D_t	完全	不完全	$\bar{\mu}(m)$	$\bar{\mu}(\beta^1)$	$\bar{\mu}(\beta^2)$	$\bar{\mu}(\beta^3)$	$\log_{10} B_{a0}$
	サンプル数	サンプル数	$(\underline{m}_{0.05}, \overline{m}_{0.05})$	$(\underline{\beta}_{0.05}^1, \overline{\beta}_{0.05}^1)$	$(\underline{\beta}_{0.05}^2, \overline{\beta}_{0.05}^2)$	$(\underline{\beta}_{0.05}^3, \overline{\beta}_{0.05}^3)$	
D_{200}	119	81	1.32 (1.16, 1.50)	-3.81 (-4.40, -3.26)	0.061 (-0.239, 0.372)	-0.002 (-0.026, 0.020)	735
D_{400}	237	163	1.47 (1.35, 1.60)	-4.46 (-4.90, -4.03)	0.213 (-0.003, 0.432)	0.004 (-0.011, 0.019)	1647
D_{600}	357	243	1.47 (1.37, 1.57)	-4.49 (-4.84, -4.15)	0.261 (0.086, 0.437)	0.006 (-0.006, 0.018)	2457
D_{800}	481	319	1.46 (1.37, 1.55)	-4.50 (-4.79, -4.20)	0.296 (0.141, 0.449)	0.009 (-0.001, 0.020)	3240
D_{1000}	593	407	1.45 (1.37, 1.53)	-4.45 (-4.70, -4.18)	0.215 (0.077, 0.350)	0.009 (-0.001, 0.018)	4110

注) 完全サンプル数, 不完全サンプル数はそれぞれのデータベースに含まれる完全サンプル, 不完全サンプルの数を表す。 $\bar{\mu}(m), \bar{\mu}(\beta^j)$ ($j = 1, 2, 3$)は, パラメータの標本平均値を表す。下段は各パラメータの90%信頼域を示している。 B_{a0} はデータベース D_a ($a = 200, 400, 600, 800, 1000$)を用いてバイズ更新したモデルの周辺尤度の初期周辺尤度 $S_0(\xi_a) = \mathcal{L}_0(\xi_a|\theta_0)$ に対するバイズファクターを表している。 $\theta_0 = (1, 0, 0, 0)$ であり, ξ_a はデータベース D_a からのデータを意味する。

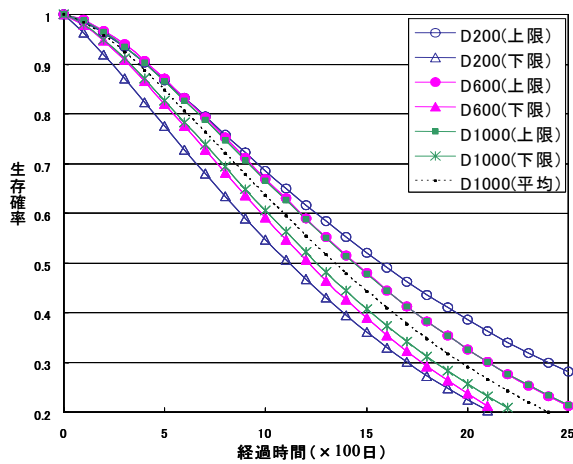


図-5 生存関数 (完全モニタリング情報)

注) 凡例の中で上限, 下限と記載されている曲線は, それぞれ90%信頼上限曲線と90%信頼下限曲線を表す。図中, D_{600} と D_{1000} の90%信頼上限曲線はほぼ重なり合っている。

同表にはバイズ更新したモデルのバイズファクターの対数値を示している。表-3に示した判断基準に従えば, パラメータを確定値 $\theta_0 = (m, \beta^1, \beta^2, \beta^3) = (1, 0, 0, 0)$ と与えたモデルを用いた場合と比べて, バイズ更新により推計精度が改善されたことに関する決定的な証拠があると判断できる。さらに, データベース D_{1000} を用いてバイズ更新されたパラメータの期待値 $\bar{\mu}(m), \bar{\mu}(\beta^j)$ (表-5参照)を用いてワイブル劣化ハザード関数を定義しよう。このワイブル劣化ハザードモデルを用いて作成した低圧ナトリウムランプ (平均点灯時間: 11.7時間/日)の生存関数を図-5に示している (図中の凡例において, D_{1000} (平均) と記載の曲線に該当す

る)。ワイブル劣化ハザードモデルでは生存関数は無限期間にわたって定義され, 使用期間が無限大となる時に生存確率がゼロに漸近する。しかし, 生存関数を現場におけるリスク管理図表として用いる場合, 生存関数の漸近的な挙動に関する情報は不必要であり, ここでは通常の道路照明マネジメントの範囲内 (使用期間最大25ヶ月, 生存確率0.2以上)における生存関数のみを記載している。

バイズ推計法の1つの特徴は, モデルのパラメータ値の確率分布が求まる点にある。モデルのパラメータ値の信頼域は標本順序統計量 $(\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha), (\underline{\beta}_\alpha^j, \overline{\beta}_\alpha^j)$ ($j = 1, 2, 3$)を用いて分析することができる。その結果は, 表-5に示した通りである。劣化ハザードモデルのパラメータ値が異なれば, それから導出される生存関数も変わってくる。実用的には, モデル全体の信頼域を定義できる方が望ましい。このような, モデル全体の信頼域を求める方法を提案しよう。ギブスサンプリングより求めたパラメータ標本を $\theta^k = (m(k), \beta(k))$ ($k = \underline{n}+1, \dots, \bar{n}$)と表そう。さらに, パラメータ標本 θ^k を用いて, バイズ推計で用いるワイブル劣化ハザード関数を次式で表す。

$$\lambda_i^k(y_i, \mathbf{x}_i; \theta^k) = \exp(\beta^1(k) + \beta^2(k)x_i^2 + \beta^3(k)x_i^3)m(k)y_i^{m(k)-1} \quad (48)$$

この時, 式(4)に基づいて生存関数 $\tilde{F}(y, \mathbf{x}_i; \theta^k)$ を

$$\tilde{F}(y, \mathbf{x}_i; \theta^k) = \exp \left[- \int_0^y \lambda_i^k(u, \mathbf{x}_i; \theta^k) du \right] \quad (49)$$

と定義できる。この時, 説明変数の組み合わせ $\xi = (y, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ に対して, 生存率サンプル $\tilde{F}(k; \xi)$ ($k = \underline{n}+1, \dots, \bar{n}$)を $\tilde{F}(k; \xi) = \tilde{F}(y, \bar{\mathbf{x}}; \theta^k)$ により定義しよう。ここで, 生存関数の $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼区間を定義

するために、標本順序統計量 $H_\alpha(y, \bar{x}), \bar{H}_\alpha(y, \bar{x})$ を

$$H_\alpha(y, \bar{x}) = \arg \max_{\tilde{F}(k^* : \xi)} \left\{ \frac{\#\{\tilde{F}(k : \xi) \leq \tilde{F}(k^* : \xi), k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - n} \leq \alpha \right\} \quad (50a)$$

$$\bar{H}_\alpha(y, \bar{x}) = \arg \min_{\tilde{F}(k^{**} : \xi)} \left\{ \frac{\#\{\tilde{F}(k : \xi) \geq \tilde{F}(k^{**} : \xi), k \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - n} \leq \alpha \right\} \quad (50b)$$

と定義しよう。低圧ナトリウムランプの使用時間 y と $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼区間の下限値 $H_\alpha(y, \bar{x})$ の関係 (以下, $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼下限曲線と呼ぶ) を求めた。同様に、使用時間と上限値 $\bar{H}_\alpha(y, \bar{x})$ の関係を $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼上限曲線と呼ぶ。図-5には、データセット $D_{200}, D_{600}, D_{1000}$ のそれぞれに対して求めた $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼下限曲線と、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼上限曲線を示している。ただし、本図の場合には、 $\alpha = 0.05$ に設定しており、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼下限曲線と、 $100(1 - 2\alpha)\%$ 信頼上限曲線はそれぞれ 90% 信頼上限曲線と 90% 信頼下限曲線を表している。図-5に示すように、蓄積されたデータが多くなるほど、任意の経過時間 y に対して、 90% 信頼上限曲線と 90% 信頼下限曲線の幅が狭まっていることが理解できる。

(3) 事前情報の影響

ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計にあたって、事前分布 $f(m), g(\beta)$ を与えることが重要となる。ベンチマークケースでは、初期時点において、事前情報に関する情報が存在しない場合 (Case d) を想定している。しかし、初期時点で、パラメータ値に関する情報を利用することにより、ベイズ推計の効率性を増加させることができる。事前分布のタイプとして、4.(4)で考察したように、1) 参照となるワイブル劣化ハザードモデルが利用可能な場合 (Case b)、2) 主観的な技術情報が入手可能な場合 (Case c) を考えることができる。Case bの場合、パラメータ θ の期待値 $\bar{\mu}(m), \bar{\mu}(\beta^j)$ に関する情報のみが利用できる。しかし、多くの場合、ハザード劣化モデルの推計事例の入手は困難であろう。この場合、Case cのように、現場の技術者の経験的情報を活用する方法を用いざるを得ない。本適用事例では、現場の技術者が、「経過年数 y_i 年で、割合にしておよそ $1 - p_i$ の照明ランプが不点になる」という判断が可能である場合を想定しよう。いま、2つの経験情報 $(y_1, p_1), (y_2, p_2)$ が獲得できた場合を考える。この時、ワイブル劣化モデルの生存分布関数 (7b) より

$$p_1 = \exp(-\gamma y_1^m) \quad (51a)$$

$$p_2 = \exp(-\gamma y_2^m) \quad (51b)$$

が成立する。これより、パラメータ (m, γ) の2点見積もり値

$$m^\circ = \frac{\ln(-\ln p_1) - \ln(-\ln p_2)}{\ln y_1 - \ln y_2} \quad (52a)$$

$$\gamma^\circ = -\frac{\ln p_1}{y_1^{m^\circ}} \quad (52b)$$

を得る。しかし、この方法では、個々のパラメータ $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ の期待値を求めることは不可能である。そこで、定数項 β^1 の期待値 μ_0^1 に関して $\mu_0^1 = \ln \gamma$ を設定し、それ以外のパラメータ β^2, β^3 に関してはJeffreys型無情報事前分布 (27b) を採用することとする。一方、パラメータ m の分散 $\sigma^2(m)$ 、パラメータベクトル β の分散・共分散行列 Σ_0 に関する情報が利用可能ではない。事前分布として標準ガンマ分布、分散1の正規分布を用いることとすれば、 m の初期事前分布であるガンマ分布は $\mathcal{G}(m_0, 1)$ で表現できる。また、パラメータ β^1 の初期事前分布を $\mathcal{N}(\mu_0^1, 1)$ で与える。5.(2)で作成したデータベースは、完全モニタリングデータベースより標本サンプルを無作為非復元抽出することにより再構成したものである。当然のことながら、無作為抽出による標本サンプリングの結果により、データベースに含まれる標本サンプルが異なる。その結果、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計結果も異なる。そこで、完全モニタリングデータベースより200個の標本サンプルを、1000回異なった方法で無作為に抽出することにより1000個のデータベース D_{200} を作成した。以上のように作成した1000個のデータベースのそれぞれに対してワイブル劣化ハザードモデルを推計した。同様に、データベース $D_{400}, D_{600}, D_{800}, D_{1000}$ に関しても、それぞれ1000個ずつ異なるデータベースを作成し、それぞれのデータベースに対してワイブル劣化ハザードモデルを推計した。さらに、それぞれのパラメータの推計結果に対して 90% 信頼区間の下限値と、上限値を求めるとともに、これらの下限値、上限値の平均値を求めた。図-6は、データベース $D_{200} \sim D_{1000}$ と加速度パラメータ m の上限値 $\bar{m}_{0.05}$ と下限値 $\underline{m}_{0.05}$ の期待値 $E[\bar{m}_{0.05}]$ と $E[\underline{m}_{0.05}]$ の関係を示したものである。同図には、2点見積もり値 (52a), (52b) を用いた場合 (Case c) とJeffreysの無情報事前分布を用いた場合 (Case d) をとりあげ、事前情報の種類が加速度パラメータ m の推計値の信頼域に及ぼす影響を分析した結果を示している。経験情報は、仮想的に「使用期間4年で、60%のランプが不点になる」、「使用期間6年で、80%のランプが不点になる」($m = 1.39, \beta^1 = -3.81$) と設定した。加速度パラメータの2点見積もり値は、完全モニタリングデータベースに基づいて推計したパラメータ値 (1.44) より小さい値を示している。その結果、加速度パラメータの下限値の期待値 $E[\underline{m}_{0.05}]$ は、Jeffreysの無情報事前分布を用

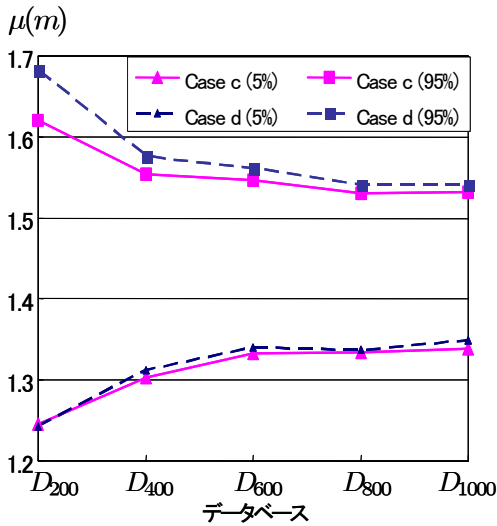


図-6 事前分布とパラメータの信頼域の関係

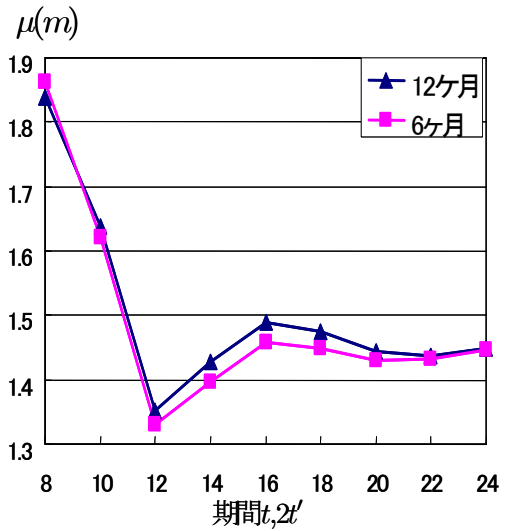


図-7 定期モニタリング情報とベイズ更新μ(m)

いた場合の下限値の期待値よりも若干小さい値となっている。一方、上限値の期待値は、2点見積もり値を用いることにより、Jeffreysの無情報事前分布を用いた場合の上限値の期待値より大幅に小さい値となっている。このことはサンプル数が少ないデータベース D_{200} の場合に特に顕著である。サンプルが少ない場合には、より正確な経験情報を用いることにより、ワイブル劣化ハザードモデルの推計精度を改善できることが理解できる。

(4) 定期モニタリング情報

定期モニタリング業務を通じてモニタリング情報を獲得する場合をとりあげよう。定期モニタリングスキームとして、1) 6ヶ月定期モニタリング、2) 12ヶ月定期モニタリングという、点検時間のインターバルを変化させた2種類のスキームをとりあげる。その際、完全モニタリングデータベースを用いて、以下のような方法で6ヶ月定期モニタリングデータベースを作成した。すなわち、1983年4月から1995年3月までの12年間を6ヶ月ごとに合計24個の期間に分割した。それぞれの期間の期末にモニタリングが実施されると考える。各データベースには、当該期間中に観測されたモニタリング情報のみが含まれる。このように更新時期が記載されているデータがある期間 $t (t = 1, \dots, 24)$ 内のある時点において不点になったとしよう。定期モニタリングにおいては、不点が生じた正確な時刻は分からない。しかし、期間 t の期末に実施される定期モニタリングでは、当該期間 t 中に不点となったという事実が観測されることになる。定期点検時点において不点となっている照明ランプは、一斉に取り替えられると考える。なお、実証分析

で用いた完全モニタリングデータベースでは、ランプが不点となった段階で直ちにランプが更新されており、ランプが更新された日付が記載されている。しかし、定期モニタリングの場合、モニタリング時点にはじめてランプの不点が判明することになる。そこで、定期モニタリングデータベースを作成するにあたっては、定期モニタリングが実施された日に当該ランプが更新され、当該ランプの新しいサイクルが始まることとした。以上のように作成した6ヶ月定期モニタリングデータベース、12ヶ月定期モニタリングデータベースを、それぞれ $\tilde{D}_t^6 (t = 1, \dots, 24)$, $\tilde{D}_{2t'}^{12} (t' = 1, \dots, 12)$ と表そう。初期事前情報として、2点見積もり値(52a),(52b)を用いた。以上のデータに基づいて、ベンチマークモデルのベイズ推計と同様に、ワイブル劣化ハザードモデルのパラメータを逐次更新した。図-7は2つの定期モニタリングスキームの下で、ベイズ更新により加速度パラメータ m の期待値 $\mu(m)$ がどのように更新されるか分析した結果を示している。なお、 $\tilde{D}_1^6 \sim \tilde{D}_7^6$, $\tilde{D}_2^{12} \sim \tilde{D}_6^{12}$ のデータベースに含まれる完全サンプル数が極めて少ないため、同図ではこれらのデータベースに関する記載を省略している。このようなデータベースからもベイズ推計することは可能であるが、本節の目的は、点検間隔の違いがワイブルハザードモデルの推計精度に与える影響を分析することにあるため、これらのデータベースからの推計結果の記載を省略した。図-7に示すように、データの蓄積量が少ない段階では加速度パラメータの期待値 $\mu(m)$ が変動するが、データ数が蓄積されるに従って期待値の変動が小さくなる。しかし、6ヶ月モニタリングデータ、あるいは12ヶ月モニタリングデータのいずれを用いても、ワイブルハザード関数

のベイズ更新結果にはそれほど大きな差異は見いだせない。同図より、期待値の推計精度には、モニタリング間隔の差異よりも、データのストック量の差異の方が大きな影響を及ぼすことが理解できる。

(5) 実用化への示唆

定期モニタリングスキームでは、モニタリングの回数を重ねるについて、完全サンプルデータが蓄積される。本研究でとりあげた適用事例では、6ヶ月点検、もしくは12ヶ月点検の場合でも10年程度モニタリング情報を蓄積することにより、完全モニタリング情報を用いた場合と同程度の推計精度を有するワイブルハザードモデルを推計できることが判明した。さらに、6ヶ月モニタリング情報、あるいは12ヶ月モニタリング情報を用いても推計精度に大きな差異が現れていない。このことより、道路付帯施設のアセットマネジメントにおいて、劣化ハザード関数の推計という目的からは、必ずしも定期モニタリングを永続的に実施する必要性はないことが理解できる。当然のことながら、トンネル照明の定期モニタリングはランプの故障の有無を把握し、故障したランプ交換することを目的として実施される。劣化予測のためのデータの収集は本来のモニタリングの目的に対して、付随的な意味しか持っていない。適用事例で明らかにしたように、半年から1年程度のモニタリング間隔を対象としている限り、モニタリング間隔はトンネル照明の劣化ハザード関数の推計精度に大きな影響を及ぼさない。しかし、モニタリング間隔を長くすれば、前回のモニタリング時点から今回のモニタリング時点までに故障するランプ数が増加する。したがって、ランプの故障に関するサービス水準、例えば参考文献1)に示したように、ランプの生存確率の閾値(サービス水準)を設定することにより、生存確率と経過時間の関係からモニタリング間隔を設計することが可能となる。

定期モニタリング情報は、モニタリング時点において故障したランプのみを交換することにより得ることができる。しかし、トンネルによっては、一定間隔ごとにすべてのランプを同時に交換する場合の方が、よりライフサイクル費用を抑制できる場合が起こりうる。しかし、すべてのトンネル照明を一定時間間隔で交換する場合、トンネル照明の使用期間長に関するデータがすべて一定値となり、使用期間長 y_i に関わるパラメータ m の値を精度よく推計できなくなる。この問題は、多くの使用期間長の異なるデータがプールできれば、ある程度克服することができる。しかし、本来、施設の交換タイミングは、ライフサイクル費用の最小化の観点に基づいて決定されるべきであり、その結果としてモニタリングデータが獲得できると考えるべきである

う。このように一斉モニタリングスキーム(ランプを同時に交換する場合)では、劣化ハザード関数を推計するための完全サンプルデータが蓄積される構造になっていない。そのため、劣化予測モデルを推計するためのモニタリング情報の収集を別途行うことが必要となる。

6. おわりに

本研究では劣化状態が故障の有無という2値状態で表されるような土木施設を対象として、ワイブル劣化ハザードモデルをベイズ推計する方法を提案した。土木施設の劣化状態に関する点検データの蓄積が不十分な場合、技術者の経験情報や他の地域や施設における推計結果を活用し、ワイブル劣化ハザードモデルを推計せざるを得ない。本研究では、ベイズ推計のための事前情報として、既往の推計結果、技術者の経験情報を活用する場合を想定し、トンネル照明ランプを対象としてベイズ推計法の有効性を実証的に検討した。その結果、点検データの蓄積が不十分な段階においても、例えばランプの期待寿命に関する情報が利用可能であれば、まったく情報を考慮しない場合と比較して、ワイブル劣化ハザードモデルの推計精度が大幅に改善されることが判明した。さらに、点検データとして、完全モニタリング情報、定期モニタリング情報という異なるタイプの情報が利用可能な場合を想定し、ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ更新の方法を提案している。本研究で提案した劣化ハザードモデルのベイズ推計の方法論は、多様な種類の土木施設の劣化予測に適用可能であるが、その適用範囲を拡大するために以下の課題が残されている。第1に、点検業務による劣化状態のモニタリング結果に計測誤差が含まれる場合がある。施設の劣化状態が故障の有無という2値状態で表される場合には計測誤差は少ないと考えられる。しかし、モニタリング結果に主観的判断が含まれるような構造物の場合、計測誤差の問題が無視できない。被説明変数に計測誤差が含まれる劣化ハザードモデルを開発することが必要となる。第2に、橋梁等の土木施設の劣化状態を複数の健全度により表現した統計的劣化予測モデルとして多段階指数劣化ハザードモデル⁴⁾や多段階ワイブル劣化ハザードモデル⁵⁾が開発されている。今後、これらの統計的予測モデルをベイズ推計する方法論を開発することが必要となる。第3に、個々の土木施設に無視できない異質性が含まれる場合がある。特に、初期時点での工事不良や初期故障が存在する場合、このような異質性が問題になる。土木施設の劣化過程に関するデータの中から、個別の土木施設が有する異質性をベイズ推計法により識別するような方法論の開発が必要である。この種の異質性を識別する

方法として、混合ハザードモデルを用いた劣化予測モデルが有用であろう。最後に、以上の劣化予測モデルのベイズ推計を運用するために点検・データ更新を組み込んだような土木施設のアセットマネジメントシステムを開発することが不可欠である。

付録 I Chibの方法

表記の簡単化のためにパラメータベクトル $\theta = (m, \beta^1, \dots, \beta^K) = (\theta_0, \dots, \theta_K)$ と表そう。モデル a の周辺尤度 $S_a(\bar{\xi})$ は

$$S_a(\bar{\xi}) = \int \tilde{L}_a(\bar{\xi}|\theta) \pi_a(\theta) d\theta$$

と定義できる。式(16)より、すべての θ に対して、周辺尤度 $S_a(\bar{\xi})$ は

$$S_a(\bar{\xi}) = \frac{\tilde{L}_a(\bar{\xi}|\theta) \pi_a(\theta)}{\pi_a(\theta|\bar{\xi})} \quad (I.1)$$

を満たす。ここで、 $\pi_a(\theta|\bar{\xi})$ はモデル a の事後確率密度を表す。両辺の対数をとれば

$$\ln S_a(\bar{\xi}) = \ln \tilde{L}_a(\bar{\xi}|\theta) + \ln \pi_a(\theta) - \ln \pi_a(\theta|\bar{\xi}) \quad (I.2)$$

となる。上式において $\theta = \theta^* = (\theta_0^*, \dots, \theta_K^*)$ を既知とすれば、第1項、第2項の値は関数形が陽的に表現されているため、容易に求まる。周辺尤度を求めるためには、第3項 $\ln \pi_a(\theta|\bar{\xi})$ の値が必要となる。ここで、

$$\pi_a(\theta^*|\bar{\xi}) = \pi_a(\theta_0^*|\bar{\xi}) \cdot \pi_a(\theta_1^*|\bar{\xi}, \theta_0^*) \cdot \pi_a(\theta_2^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \theta_1^*) \cdot \pi_a(\theta_K^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \dots, \theta_{K-1}^*) \quad (I.3)$$

が成立することに着目すれば次式が成立する。

$$\ln \pi_a(\theta^*|\bar{\xi}) = \sum_{j=0}^K \ln \pi_a(\theta_j^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \dots, \theta_{j-1}^*) \quad (I.4)$$

上式に含まれる $\pi_a(\theta_j^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \dots, \theta_{j-1}^*)$ は、ギブスサンプリングにより得られた標本 $\theta_0(k), \dots, \theta_K(k)$ を用いて、

$$\pi_a(\theta_j^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \dots, \theta_{j-1}^*) \approx \frac{1}{\bar{n} - n} \sum_{k=n+1}^{\bar{n}} \pi_a(\theta_j^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \dots, \theta_{j-1}^*(k), \theta_{j+1}(k), \dots, \theta_K(k)) \quad (I.5)$$

と近似することができる。ただし、ワイブル劣化ハザードモデルの場合、条件付き事後確率密度関数 $\pi_a(\theta_j^*|\bar{\xi}, \theta_0^*, \dots, \theta_{j-1}^*)$ を簡単な関数形を用いて表現できないため、1次元の数値積分を実施する必要がある。

参考文献

- 1) 青木一也, 山本浩司, 小林潔司: 劣化予測のためのハザードモデルの推計, 土木学会論文集, No.791/VI-67, pp.111-124, 2005.
- 2) Mishalani, R. and Madanat, S.: Computation of infrastructure transition probabilities using stochastic duration models, *ASCE Journal of Infrastructure Systems*, Vol.8, No.4, pp.139-148, 2002.

- 3) Shin, H.C. and Madanat, S.M.: Development of stochastic model of pavement distress initiation, *Journal of Infrastructure Planning and Management*, No.744/IV-61, pp.61-67, 2003.
- 4) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.69-82, 2005.
- 5) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 6) 貝戸清之, 阿部允, 藤野陽三: 実測データに基づく構造物の劣化予測, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.29-38, 2003.
- 7) Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A.: *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model From Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- 8) 鍵本広之, 佐藤道生, 川村満紀: アルカリシリカ反応により劣化した施設の劣化度評価と細孔溶液分析による劣化進行の予測, 土木学会論文集, No.641/V-46, pp.241-251, 2000.
- 9) 小林孝一, 宮川豊章: 分極抵抗法を用いた鉄筋の腐食速度評価に関する研究, 土木学会論文集, No.669/V-50, pp.173-186, 2001.
- 10) 堤知明, 白井伸一, 安田登, 松島学: 塩害劣化に関する影響要因の実データに基づく定量評価, 土木学会論文集, No.544/V-32, pp.33-41, 1996.
- 11) 大野俊夫, 魚本健人: コンクリートの収縮ひび割れ発生予測に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.662/V-49, pp.29-44, 2000.
- 12) 元路寛, 関博, 高木言芳: 中性化したコンクリートにおける乾湿繰返し作用による鉄筋腐食に関する研究, 土木学会論文集, No.697/V-54, pp.1-11, 2002.
- 13) 佐伯竜彦, 大即信明, 長瀧重義: 中性化によるモルタル中の鉄筋腐食の定量的評価, 土木学会論文集, No.532/V-30, pp.55-66, 1996.
- 14) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 15) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 16) Box, G.E.P. and Tiao, G.C.: *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- 17) 繁橋算男: ベイズ統計入門, 東京大学出版会, 1985.
- 18) たとえば, 小林潔司, 藤高勝己: 合理的期待形成を考慮した経路選択モデルに関する研究, 土木学会論文集, No.458/IV-18, pp.17-26, 1993.
- 19) Guttman, J. and Sinha, S.K.: Bayesian inference about the reliability function for the exponential distributions, *Communications Statistics*, Vol.A.5, 1976.
- 20) Martz, H.F. and Waller, R.A.: *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- 21) Ferrguson, T.S.: Bayesian Density Estimation by Mixtures of Normal Distribution, In Razvi, M.H., Rustagi, J.S. and Siegmund, D.(eds.): *Recent Advances in Statistics*, Academic Press, New York, pp. 287-302, 1983.
- 22) Siddiqui, S.A., Jain, S., and Chauhan, R.K.: Bayesian analysis of reliability and hazard rate function of a mixture model, *Microelectronic Reliability*, Vol.37, pp.935-941, 1997.
- 23) Sharma, K.K., Krishina, H. and Singh, B.: Bayes estimation of the mixture of hazard-rate model, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.55, pp.9-13, 1997.

- 24) Escobar, M.D. and West, M.: Bayesian density estimation and inference using mixtures, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.577-588, 1995.
- 25) Kalbfleisch, J.D.: Non-parametric Bayesian analysis of survival time data, *Journal of Royal Statistics Society*, Ser. B40, pp.214-221, 1978.
- 26) Ruggiero, M.: Bayesian semiparametric estimation of proportional hazard models, *Journal of Econometrics*, Vol. 62, pp.277-300, 1994.
- 27) Sinha, D. and Dey, D.: Semiparametric Bayesian analysis of survival data, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.92, pp.1195-1212, 1997.
- 28) Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statistics, 2001.
- 29) Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.
- 30) Gelfand, A.E. and Smith, A.F.M.: Sampling-based approaches to calculating marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.85, pp.398-409, 1990.
- 31) Gilks, W.R. and Wild, P.: Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling, *Applied Statistics*, Vol.41, pp.337-348, 1992.
- 32) Arjas, E. and Gasbarra, D.: Nonparametric Bayesian inference from right censored survival data, using the Gibbs sampler, *Statistics Sinica*, Vol.4, pp.505-524, 1994.
- 33) Tobin, J.: Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, Vol.26, pp.24-36, 1958.
- 34) 東京大学教養学部統計学教室編：自然科学の統計学，東京大学出版会，1992.
- 35) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.
- 36) Jeffreys, H.: *The Theory of Probability*, Oxford University Press, 1961.
- 37) Chib, S.: Marginal likelihood from Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321, 1995.
- 38) Han, C. and Carlin, B.P.: MCMC methods for computing Bayes factors, A comparative review, *Biometrika*, Vol.84, pp.711-732, 2000.
- 39) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in: Bernardo, J.M., Berger, J.M., Dawid, A.P., and Smith, A.F.M. (eds.) :*Bayesian Statistics 4*, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 40) Newey, W.K. and West, K.D.: A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
- 41) 鈴木雪夫，国友直人編：ベイズ統計学とその応用，東京大学出版会，1989.

(2005. 11. 29 受付)

BAYESIAN ESTIMATION OF WEIBULL HAZARD MODELS FOR DETERIORATION FORECASTING

Yoshitane TSUDA, Kiyoyuki KAITO, Kouji YAMAMOTO and Kiyoshi KOBAYASHI

While the forecasting of deterioration is one of the central tasks in infrastructural asset management, it is often the cases where there are few data stocks available for estimating the deterioration forecasting model. In this paper, the step-wised methodology, which is designed to revise the existing model based upon newly observed data set, is presented. In so doing, a Bayesian estimation method is formulated to revise the Weibull hazard model, which is applied to forecast the expected life time of the infrastructural facilities, whereby the Markov Monte Carlo methods is applied to efficiently update the ex-post distribution of the set of unknown parameters. The applicability of the methodology presented in this paper is examined against the real world data concerning the tunnel lumps on the highways.