

混合マルコフ劣化ハザードモデルの 階層ベイズ推計

貝戸清之¹・小林潔司²・青木一也³・松岡弘大⁴

¹正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

²フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

³正会員 株式会社パスコ研究開発センター (〒 153-0043 目黒区東山 2-8-11)

E-mail: kiakzo6013@pasco.co.jp

⁴学生員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: k-matsuoka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

社会基盤施設の劣化過程においては、施設の構造特性や使用・環境条件の違いにより劣化速度に多大な異質性が存在する。個々の施設に特有な異質性がもたらす劣化速度の過分散の問題を克服するために、施設グループ間の劣化速度の異質性を明示的に考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルが提案されている。本研究では、劣化速度の過分散が、施設グループ間における劣化速度の異質性と、グループを構成する個々の施設間における異質性というレベルの異なる2つの異質性が複合された結果により発生すると考える。その上で、階層的異質性を導入した混合マルコフ劣化ハザードモデルを定式化し、その階層ベイズ推計法を提案する。最後に、橋梁床版に対する目視点検データを用いた実証分析を通して、本研究で提案する手法の妥当性を検討する。

Key Words : *hierarchical Bayesian estimation, mixed Markov hazard model, heterogeneity*

1. はじめに

社会基盤施設のアセットマネジメントにおいては、これまで暗黙知によってなされてきた維持管理に関する意思決定プロセスの形式知化を通して、1) 客観的な事実に基づく説明責任と、2) 組織内における効率的な技術継承を果たすことが期待されている¹⁾。その過程において、意思決定プロセスの客観性を担保するために数理モデルを援用した方法論の構築が求められている。近年では、現場で蓄積された目視点検データを活用する統計的アプローチ、すなわち統計的劣化予測手法に関する研究開発が著しい。なかでも、マルコフ劣化ハザードモデル²⁾の開発により、アセットマネジメントの実用化が急速に進展した。さらに、劣化過程に介入する施設ごとの異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾が提案され、社会基盤施設の劣化速度のベンチマーキング評価を行うことが可能となった。

混合マルコフ劣化ハザードモデル³⁾は、施設全体の平均的な劣化予測にとどまらず、施設グループ(劣化環境が均質であると想定される評価単位)間の劣化速度の異質性を考慮できるという利点がある(管理者が管理する全ての施設を「施設全体」、劣化環境が均質であると想定される施設集合を「施設グループ」、施設グループに含まれる個々の施設を単に「施設」と呼ぶ。以下、

劣化予測の対象に応じて、「施設」を構造物や部材に読み変えて欲しい。) 。過去の適用事例³⁾では、1) 社会基盤施設の劣化過程には、代表的な劣化要因を表す説明変数では表現できない施設グループ固有の要因が介入すること、2) 同一の施設グループによっても個々の施設により劣化速度の異質性が存在していることが指摘されている。これらの異質性が複合された結果、社会基盤施設の劣化速度の間には非常に大きなばらつきが見い出されるという過分散の問題が存在する。さらに、劣化速度の異質性に対して、混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いることにより平均的な劣化モデルを用いて劣化予測のベンチマーキングを行うとともに、評価単位ごとの劣化速度の相対評価を通じて施設グループの劣化特性を分析する方法が提案されている。

小濱ら³⁾は、混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計するために、第1段階でモデルの未知パラメータを最尤法を用いて推計し、第2段階において異質性パラメータを最尤推計するという段階的最尤法を提案している。しかし、段階的最尤法では、**2.(3)**で詳述するように、1) 施設グループ間における劣化速度の異質性と、同一グループを構成する個々の施設間における劣化速度の異質性を区別できない、2) 施設グループごとにサンプル数(目視点検データ数)が異なるために、混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータ推計において推計

バイアスが発生するという問題が存在する。アセットマネジメント技術の継続的な高度化を図るためには施設グループ間ごとの劣化特性と同一グループ内における個々の施設の劣化特性を明確に分離し、評価単位の劣化速度を相対評価するようなベンチマーキング技術を開発することが必要となる。このため、施設の異質性評価の精度を向上させることが課題であった。

以上の問題解決を図るために、本研究では混合マルコフ劣化ハザードモデルを階層ベイズモデルで表現するとともに、そのモデルのベイズ推計（以下、階層ベイズ推計）を試みる。具体的には混合マルコフ劣化ハザードモデルの未知パラメータに対して階層構造を有する事前分布を導入するとともに、マルコフ連鎖モンテカルロ法（以下、MCMC法）により異質性パラメータを含む全ての未知パラメータをそれぞれの事後分布、あるいはその統計量として算出する。以下、2.で本研究の基本的な考え方を述べる。3.で混合マルコフ劣化ハザードモデルの概要を説明し、4.で階層ベイズ推計による推計手法を詳述する。最後に5.で実際の橋梁床版に対する目視点検データを用いた実証分析を行う。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 統計的劣化予測の変遷

アセットマネジメントにおける劣化予測を目的として、蓄積された目視点検データから劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化する統計的劣化モデルが発展している。特に、施設の劣化状態が目視点検により離散的健全度で規定されるような劣化過程に関しては、マルコフ連鎖モデル（マルコフ推移確率）の適用が可能である。とりわけ、橋梁マネジメントにおいては、PONTIS⁴⁾に代表されるように、劣化予測モデルとしてマルコフ連鎖モデルが採用されている。しかし、目視点検データには様々な不確実性が介在したり、観測期間に異質性が存在する。このために、点検データに基づいたマルコフ連鎖モデルの推計方法に多くの課題が残されていた。マルコフ推移確率の推計は、ハザード解析手法^{5),6)}の導入により飛躍的に発展した。中でも、Mishalani and Madanat⁷⁾は、2つの隣接する健全度のみを対象として、マルコフ推移確率を指数ハザードモデルを用いて表現する方法を提案した。これとは独立に、津田等²⁾は2つ以上の任意の健全度間における推移状態を表現する多段階指数ハザードモデル（マルコフ劣化ハザードモデル）を開発し、マルコフ推移確率を推計する一般的な方法論が確立した。マルコフ劣化ハザードモデルでは、劣化の速度を定義するハザード率に、構造特性、使用・環境条件の相違を説明変数として内包することが可能である。したがって、種々の条件の相違が劣化過程に

及ぼす影響を定量的に評価できる。しかし、考慮することが可能な説明変数は、施設の平均的な劣化特性の差異を表現するような要因に限られ、膨大な数の社会基盤施設それぞれに固有な劣化条件の異質性を説明変数を用いて記述することには限界があった。

マルコフ劣化ハザードモデルの限界を克服するために、小濱等³⁾は混合マルコフ劣化ハザードモデルを開発した^{8),9)}。マルコフ劣化ハザードモデルでは、社会基盤施設の劣化速度の違いを、主要な劣化要因に関して説明変数として説明する。しかし、社会基盤施設の劣化過程には、たとえば、初期施工時における施工技術や施工状態、材料の質などのように、代表的な劣化要因を表す説明変数では表現できない施設グループ固有の要因が介在する。混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、代表的劣化説明変数では記述できないシステム的な要因に基づく劣化速度の変動を異質性パラメータを用いて表現する。すなわち、個別ハザード率を、異質性パラメータと標準ハザード率を用いて、

健全度別劣化速度（個別ハザード率）

$$= \text{異質性パラメータ} \times \text{健全度別標準ハザード率} \quad (1)$$

と定義する。異質性パラメータは評価単位となる施設グループ（たとえば、路線単位、構造物単位）に特有なシステムの要因に基づく劣化速度の違いを表すパラメータであり、施設グループ内では共通の値を有すると考える。さらに、個別ハザード率は健全度ごとに定義されるが、異質性パラメータが健全度を通じて一定の値をとるような比例ハザードモデルを考える。異質性パラメータを健全度ごとに定義することも可能であるが、1) 異質性パラメータを推計するためのサンプル数が極端に少なくなる場合がある、2) 施設グループごとの劣化速度の相対的な違いを一元的に評価するという実際的な理由により、本研究では比例ハザードモデルを用いることとした。このように施設グループ別に異質性パラメータを定義したとしても、たとえば、1,000個の施設グループを対象とする場合、推計すべき異質性パラメータが1,000個存在することになる。さらに、異質性パラメータを導入した混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータと異質性パラメータを同時に最尤推計を試みた場合、最尤推計問題の1階の最適化条件が極めて高次元の非線形方程式となり、パラメータの最尤推計量を求めることが困難となる。そこで、混合マルコフ劣化ハザードモデルの実用化を図るために、1) 標準ハザード率と異質性パラメータの分布特性パラメータを推計する（第1段階）、2) 各評価単位の異質性パラメータを推計する（第2段階）、という段階的最尤法を用いて個別ハザード率を推計する方法を提案している。しかしながら、評価単位に含まれるサンプル数

が、評価単位によって多様に異なっている。さらに、第1段階におけるパラメータ推計において、評価単位間の異質性と評価単位内の劣化速度の異質性を分離できないため、推計バイアスが発生する可能性が存在するという問題点があった。このような推計バイアスを克服するためには、評価単位間の異質性と評価単位内の異質性との間に存在する階層的異質性を明示的に考慮できるような推計法を提案することが必要である。

(2) ベイズ推計

Guttman & Sinha¹⁰⁾による先駆的研究以降、ハザードモデルに関するベイズ統計学が発展を遂げた^{11),12)}。さらに、近年では、関数形、確率分布形を特定化しないセミパラメトリック・ハザードモデル¹³⁾に関する研究も発展しており、これら最新の研究成果はベイズハザードモデルとして体系化されている¹⁴⁾。

ハザードモデルにベイズ推計を適用する場合、ハザードモデルのパラメータに関する事前分布と事後分布の間に共役性が成立しない。そのために、事後分布を解析的に求めることが不可能となり、実用化の障害となっていた。近年のMCMC法^{15),16)}の発展により、ハザードモデルを効率的にベイズ推計することが可能になった。津田等¹⁷⁾は劣化状態が故障の有無という2値状態で表されるような施設や機器を対象としたワイブル劣化ハザードモデル¹⁸⁾を、貝戸・小林¹⁹⁾はマルコフ劣化ハザードモデルをベイズ推計する方法を提案している。また、社会基盤施設の健全度が確定的に観測できない、つまり測定値に観測誤差が存在する場合を対象として、小林等²⁰⁾はマルコフ推移確率を推計する隠れマルコフ劣化ハザードモデルを提案している。さらに林等²¹⁾は複数の劣化過程がそれぞれ独立にマルコフ過程に従い、その中でもっとも劣化が進化した劣化事象が代表的な事象として選択されるメカニズムを競合的劣化ハザードモデルを用いて表現するとともに、そのベイズ推計手法を示した。また、小林等²²⁾は道路舗装の路面の健全度の劣化過程と、舗装全体の耐荷力の低下過程のような複合劣化過程を階層型隠れマルコフ劣化ハザードモデルでモデル化するとともに、モデル推計にベイズ推計を適用している。MCMC法に基づくベイズ推計の発展により、従来では推計が困難であった複雑な劣化事象の予測が可能となった。

(3) 過分散と推計バイアス問題

サンプルの分散が推計されたモデルの理論的分散よりも大きくなるような現象は過分散 (over-dispersion) と呼ばれ、特に、故障の有無やカウントデータを統計的に分析する際に問題となることが指摘されている²³⁾。過分散はサンプルの異質性など、直接観測できない要

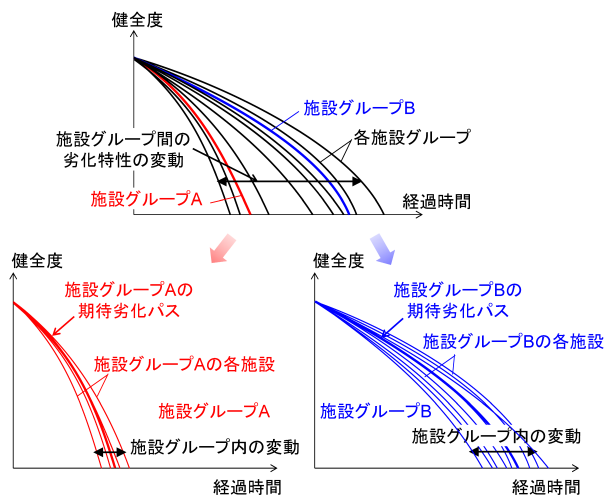
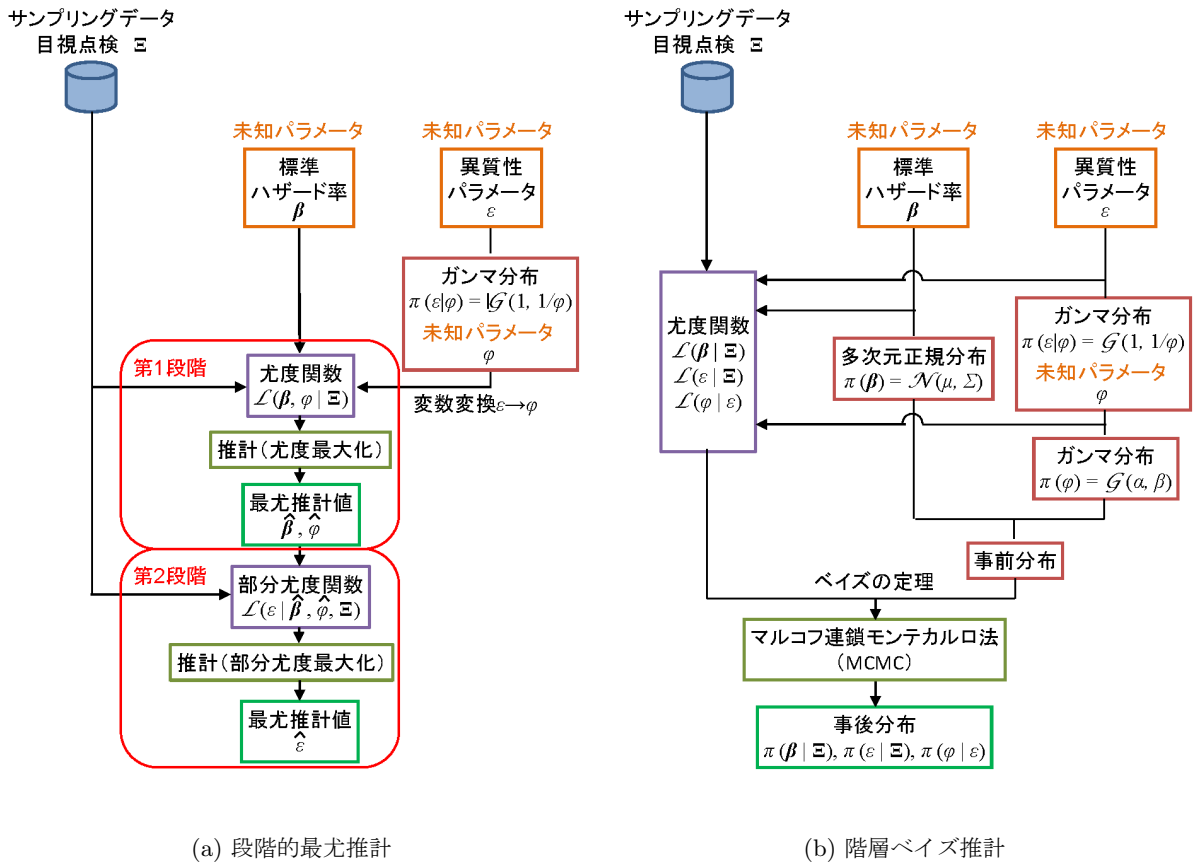


図-1 過分散問題

因の影響が大きい場合に発生する²⁴⁾。いま、対象としている社会基盤施設全体が、いくつかの施設グループ (評価単位) で構成されていると考える。さらに、各施設から、劣化過程に関する複数のサンプル情報 (たとえば目視点検データ) が得られると考える。施設グループごとに、その施設の構造特性や使用・環境条件が多様に異なり、それぞれの施設グループごとに劣化特性に異質性が存在する。図-1の上段には、施設グループごとの劣化特性の変動を表している。一方、1つの施設グループは、複数の施設により構成されており、個々の施設によっても実際には劣化特性が異なる。図-1の下段には、施設グループ内における劣化特性の変動を表している。いま、施設グループごとに複数個ずつ (しかも、グループごとに異なった個数) の劣化状態を表すサンプル情報が獲得できると考える。このとき、サンプル情報が表す劣化特性には、施設グループごとの劣化速度の異質性だけでなく、グループ内の劣化特性の異質性も含まれることになり、サンプル情報から算出される劣化速度には多大な異質性が含まれることになる。このように、異なった要因に起因する劣化特性が同時にサンプル情報に介在する場合、劣化速度の分散が非常に大きくなり、それに起因して推計バイアスが発生する。このような過分散の問題を解決するためには、施設グループごとの劣化過程に介在する多大な異質性をモデル化することが必要となる²⁴⁾。

2.(1)で述べたように、小濱等³⁾は、社会基盤施設の劣化特性の異質性を考慮するために混合マルコフ劣化ハザードモデルを提案している。そこでは、評価単位となる施設グループの劣化特性を、式(1)に示すような個別ハザード率により定義する。そのうえで、異質性パラメータを標準ガンマ分布に従う確率変数として表現するとともに、異質性パラメータの確率分布を用いて



(a) 段階的最尤推計

(b) 階層ベイズ推計

図-2 推計手法の概要

平均的マルコフ劣化ハザードモデルを導出する。さらに、図-2(a)に示すような段階的最尤法を用いて混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計している³⁾。図-2(a)に示すように、1段階目では異質性パラメータ以外の未知パラメータ（標準ハザード率： β と異質性パラメータの確率分布を決定する母数： ϕ ）を推計する。第1段階の未知パラメータの推計においては、全ての目視点検データを用いる。第2段階では、第1段階で推計された $\hat{\beta}$ と $\hat{\phi}$ を与件として、施設グループを対象としたサンプルを用いて異質性パラメータを推計する。この方法は最尤法を用いて、未知パラメータを容易に推計できるという利点がある。しかしながら、1) 施設グループ間における劣化速度の異質性と、同一グループを構成する個々の施設間における劣化速度の異質性を区別できない、2) 施設グループごとにサンプル数（目視点検データ数）が異なるために、混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータ推計において推計バイアスが生じるという問題が発生する。

(4) 階層ベイズ推計

本研究では、混合マルコフ劣化ハザードモデルが階層ベイズモデルで表現できる特徴を利用し、MCMC法によるベイズ推計により、全ての未知パラメータを同時に

推計できる手法を開発する。推計手法の概要を図-2(b)に示している。階層ベイズモデルでは、異質性パラメータに関する事前分布を設定する。ベイズの定理を援用すれば、観測情報に基づく尤度関数と、未知パラメータの事前分布から異質性パラメータの事後分布を算出することが可能となる。さらに、未知パラメータの事前分布を規定するパラメータに対して事前分布（超事前分布）を設け、これらの未知パラメータの事後分布を求めることにより、混合マルコフ劣化ハザードモデルの異質性パラメータと未知パラメータの事後分布を同時にベイズ推計することが可能である。これが階層ベイズ推計²⁵⁾⁻³⁰⁾の基本的な考え方である。本研究では具体的に、ハザード率の未知パラメータに関しては多次元正規分布を、異質性パラメータに関してはガンマ分布を仮定する。さらに、後者については事前分布を規定する母数（ハイパーパラメータ）である分散パラメータに関しても超事前分布（ガンマ分布）を導入する。混合マルコフ劣化ハザードモデルは、もともと確率モデルの中に、異質性パラメータという確率変数を取り入れた混合確率モデルである。さらに、それぞれの未知パラメータを確率変数として定義し、その事前確率を規定しているために、複雑な階層構造となる。これを階層ベイズモデルとして定式化する。なお、各未

知パラメータに対する事前分布は読者の理解を助けるために具体的な確率分布を設定しているが、あくまでも初期分布として暫定的に設定するものである。MCMC法によって、異質性パラメータを含む全ての未知パラメータをそれぞれの事後分布、あるいはその統計量を求めることができるが、観測サンプル数が増加するにつれて、初期分布として与えた事前分布が未知パラメータの事後分布に及ぼす影響は弱くなっていく。

3. 混合マルコフ劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提条件

カレンダー時刻 s_0 を初期時点とする離散的時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots$ を考え、離散的時間軸上の点を時点と呼び、カレンダー時刻と区別する。単位時間幅を1に基準化する。施設の健全性を I 個の健全度 i ($i = 1, \dots, I$) で表現する。 i の値が大きくなるほど、劣化が進展している。時点 t における施設の健全度を状態変数 $h(t) = i$ ($i = 1, \dots, I; t = 0, 1, \dots$) を用いて表現する。施設の劣化過程がマルコフ連鎖に従うと仮定し、離散時間軸上の単位時間間隔における健全度間の推移確率をマルコフ推移確率を用いて表現する。推移確率は、時点 t における健全度 $h(t) = i$ を与件とし、次の時点 $t+1$ における健全度 $h(t+1) = j$ ($j \geq i$) が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[h(t+1) = j | h(t) = i] = \pi_{ij} \quad (2)$$

を用いて定義される。なお、微小時間での健全度の推移は1段階である。このようなマルコフ推移確率(2)は所与の2つの時点 $t, t+1$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり、当然のことながら、対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0$ ($i > j$) が成立する。また、推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して、

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} = 0 \quad (i > j \text{ の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

が成立しなければならない。健全度 I は、補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立する。なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴には依存しない。マルコフ連鎖モデルでは、健全度が $i-1$ から i に推移した時点に拘わらず、時点 t から時点 $t+1$ の間に推移する確率は時点 t における健全度のみに依存するという性質(マルコフ性)を満足する³¹⁾。

(2) 混合マルコフ劣化ハザードモデル

混合マルコフ劣化ハザードモデルの詳細に関しては参考文献³⁾に譲るが、ここでは読者の便宜を図るために、同モデルを簡単に紹介しておく。本研究では目視点

検データに基づく個々の施設の劣化予測を目的としている。分析の対象とする社会基盤施設を K 個の施設グループ(評価単位)に分割する。さらに、施設グループ k ($k = 1, \dots, K$) は、合計 L_k 個の施設で構成されている。施設グループ k に固有なハザード率の異質性を表すパラメータ ε^k を導入する。このとき、施設グループ k の施設 l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) の健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) のハザード率を、個別ハザード率

$$\lambda_i^{l_k} = \tilde{\lambda}_i^{l_k} \varepsilon^k \quad (4)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K; l_k = 1, \dots, L_k)$$

を用いて表す。ここに、 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ は施設グループ k の施設 l_k が有する健全度 i の平均的なハザード率(以下、標準ハザード率)である。異質性パラメータ ε^k は、施設グループ k の標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ からの乖離の程度を表す確率変数であり、 $\varepsilon^k \geq 0$ が成立すると仮定する。異質性パラメータ $\varepsilon^k > 1$ であり、かつ ε^k の値が大きくなるほど、当該施設グループ k に含まれる全ての施設の劣化速度が、標準ハザード率に対して大きいことを表す。式(4)において、全ての健全度のハザード率に、同一の確率変数 ε^k が含まれることに留意して欲しい。これにより、ある健全度において劣化速度が大きい場合、他の健全度の劣化速度も相対的に大きくなることを表すことができる。いま、異質性パラメータ ε^k がガンマ分布 $f(\varepsilon^k | \alpha, \gamma)$

$$f(\varepsilon^k | \alpha, \gamma) = \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} (\varepsilon^k)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^k}{\gamma}\right) \quad (5)$$

から抽出された確率標本であると考え、ガンマ分布 $f(\varepsilon^k | \alpha, \gamma)$ の平均は $\alpha\gamma$ で、分散は $\alpha\gamma^2$ である。また、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。さらに、平均1、分散 $1/\phi$ のガンマ分布の確率密度関数 $\bar{g}(\varepsilon^k | \phi)$ は、

$$\bar{g}(\varepsilon^k | \phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon^k) \quad (6)$$

と表される。

ここで、施設グループ k ($k = 1, \dots, K$) の異質性パラメータ ε^k の値を $\bar{\varepsilon}^k$ に固定する。このとき、施設グループ k のある施設 l_k の健全度 i の寿命が $y_i^{l_k}$ 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i^{l_k})$ は、指数ハザード率(4)を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^{l_k}) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k y_i^{l_k}) \quad (7)$$

と書き換えることができる。さらに、施設グループ k の施設 l_k の第1回目の点検時刻 $\tau_A^{l_k}$ において健全度が i と判定され、次の点検時刻 $\tau_B^{l_k} = \tau_A^{l_k} + z^{l_k}$ においても健全度が i と判定される確率 $\pi_{ii}(z^{l_k} | \bar{\varepsilon}^k)$ は、

$$\pi_{ii}(z^{l_k} | \bar{\varepsilon}^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \quad (8)$$

となる。また、点検時刻 $\tau_A^{l_k}$ と $\tau_B^{l_k} = \tau_A^{l_k} + z^{l_k}$ の間で健全度が i から j ($> i$) に推移するマルコフ推移確率

$\pi_{ij}(z^{lk}|\varepsilon^k)$ は、式 (4) より、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z^{lk}|\varepsilon^k) &= \sum_{s=i}^j \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{lk}}{\tilde{\lambda}_m^{lk} - \tilde{\lambda}_s^{lk}} \exp(-\tilde{\lambda}_s^{lk} \varepsilon^k z^{lk}) \\ &= \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{lk}) \exp(-\tilde{\lambda}_s^{lk} \varepsilon^k z^{lk}) \end{aligned} \quad (9)$$

($i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I; k = 1, \dots, K$)

と表すことができる²⁾。ただし、 $\tilde{\lambda}^{lk} = (\tilde{\lambda}_1^{lk}, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{lk})$ である。また、 $\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{lk})$ は

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{lk}) = \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{lk}}{\tilde{\lambda}_m^{lk} - \tilde{\lambda}_s^{lk}} \quad (10)$$

となり、標準ハザード率のみの関数で表される。また、 $\pi_{iI}(z^{lk}|\varepsilon^k)$ に関しては、

$$\pi_{iI}(z^{lk}|\varepsilon^k) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z^{lk}|\varepsilon^k) \quad (11)$$

と表すことができる。つぎに、パラメータ ε^k がガンマ分布、式 (6) に従って分布する場合を考える。まず、健全度 i の寿命が y_i^{lk} 以上となる確率は、式 (8) を用いて

$$\tilde{\pi}_{ii}(z^{lk}) = \int_0^\infty \pi_{ii}(z^{lk}|\varepsilon^k) \bar{g}(\varepsilon^k|\phi) d\varepsilon^k \quad (12)$$

と表すことができる。マルコフ推移確率 $\tilde{\pi}_{ii}(z^{lk})$ はハザード率の確率分布を考慮した点検間隔 z^{lk} の平均的なマルコフ推移確率を表している。同様に点検間隔 z^{lk} の下で健全度 i から健全度 j へ推移する平均マルコフ推移確率は、

$$\tilde{\pi}_{ij}(z^{lk}) = \int_0^\infty \pi_{ij}(z^{lk}|\varepsilon^k) \bar{g}(\varepsilon^k|\phi) d\varepsilon^k \quad (13)$$

と表される。

(3) 目視点検データとハザード率

施設グループ k ($k = 1, \dots, K$) に属する施設 l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) に関して 2 回の目視点検が実施されたと考えられる。3.(2) と同様に、目視点検が実施されたカレンダー時刻を $(\tau_A^{lk}, \tau_B^{lk})$ と表す。ただし、 τ_A^{lk} は第 1 回の目視点検時刻であり、 τ_B^{lk} は第 2 回目の目視点検が実施されたカレンダー時刻である。施設グループ k に含まれる施設 l_k の点検サンプルには、第 1 回目の目視点検から第 2 回目の目視点検が実施された時刻までの期間長 \bar{z}^{lk} と、これら 2 回の目視点検で観測された施設の健全度 $\bar{h}(\tau_A^{lk})$, $\bar{h}(\tau_B^{lk})$ に関する情報が記載されている。記号「 $\bar{\cdot}$ 」は、実測値であることを意味している。点検時点における健全度に基づいて、ダミー変数 $\bar{\delta}_{ij}^{lk}$ ($i = 1, \dots, I-1, j = i, \dots, I; k = 1, \dots, K; l_k = 1, \dots, L_k$) を

$$\bar{\delta}_{ij}^{lk} = \begin{cases} 1 & \bar{h}(\tau_A^{lk}) = i, \bar{h}(\tau_B^{lk}) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (14)$$

と定義する。さらに、ダミー変数ベクトルを $\bar{\delta}^{lk} = (\bar{\delta}_{11}^{lk}, \dots, \bar{\delta}_{I-1,I}^{lk})$ 、施設の劣化速度に影響を及ぼす施設

の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトルを $\bar{\mathbf{x}}^{lk} = (\bar{x}_1^{lk}, \dots, \bar{x}_M^{lk})$ と表す。ただし、 \bar{x}_m^{lk} ($m = 1, \dots, M$) は施設グループ k 、施設 l_k の点検サンプルの m 番目の説明変数に関する期間 $[\tau_A^{lk}, \tau_B^{lk})$ における観測値を表す。また、第 1 番目の説明変数は定数項に該当する変数であり、恒等的に $\bar{x}_1^{lk} = 1$ である。施設グループ k に属する施設 l_k の点検サンプルが有する情報を $\xi^{lk} = (\bar{\delta}^{lk}, \bar{z}^{lk}, \bar{\mathbf{x}}^{lk})$ と表す。また、目視点検データ全体を Ξ と表す。

さらに、施設 l_k の点検サンプルの期間 $[\tau_A^{lk}, \tau_B^{lk})$ における劣化過程を個別ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk} = \tilde{\lambda}_i^{lk} \varepsilon^k$ ($i = 1, \dots, I-1$) を用いて表現する。健全度 I はマルコフ連鎖の吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立するためにハザード率 $\tilde{\lambda}_I^{lk}$ は必然的に $\tilde{\lambda}_I^{lk} = 0$ となる。社会基盤施設の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ ($i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K$) は施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え、標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ を特性ベクトル \mathbf{x}^{lk} を用いて、

$$\tilde{\lambda}_i^{lk} = \exp(\mathbf{x}^{lk} \boldsymbol{\beta}'_i) \quad (15)$$

と表す。ただし、 $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$ ($m = 1, \dots, M$) による行ベクトル、記号「 $'$ 」は転置操作を表す。また、 $\bar{x}_1^{lk} = 1$ より、 $\beta_{i,1}$ は定数項を表す。

4. 階層ベイズ推計

(1) 階層ベイズモデル

社会基盤施設の劣化速度を評価するためには当該施設が目視点検データが必要となるが、一般的には、特定の施設に限定した目視点検データは十分に蓄積されていない。このような場合であっても、本研究で提案する混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いれば、同一施設グループ（同じ評価単位）の目視点検データを蓄積することにより、施設の平均的な劣化過程と、着目する施設の劣化特性を分析することが可能となる³²⁾。特に、本研究で取扱う混合マルコフ劣化ハザードモデルでは異質性パラメータ ε^k が平均 1、分散 $1/\phi$ のガンマ分布で表される事前分布に従うことを仮定している。さらに、階層ベイズ推計では、異質性パラメータの分散パラメータ ϕ (ハイパーパラメータ) に関しても事前分布を設定する。事前分布を階層化したそれらのモデルは階層ベイズモデルと総称され、主にマーケティング分析などの分野で研究が進められている³²⁾。本研究でも混合マルコフ劣化ハザードモデルを階層ベイズモデルを用いて推計することとする。

一般的なベイズ推計手法では、パラメータの事前分布と、観測情報に基づいて定義される尤度関数を用いて、パラメータの事後分布を推計する。いま、尤度関数を $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ と表す。 $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \phi, \boldsymbol{\varepsilon})$ はパラメータベクトルを表す。ここで、 $\boldsymbol{\theta}$ が確率変数で、事前確率密度関数

$\pi(\theta)$ に従うと仮定する. 目視点検データ Ξ が与件であるときに, 未知パラメータベクトル θ の同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ はベイズの定理より,

$$\pi(\theta|\Xi) \propto \mathcal{L}(\theta|\Xi)\pi(\theta) \quad (16)$$

と近似できる. さらに, 事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ を,

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= \pi(\beta, \phi, \varepsilon) \\ &= \pi(\beta)\pi(\varepsilon|\phi)\pi(\phi) \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^K \pi(\beta_i)\pi(\varepsilon^k|\phi)\pi(\phi) \end{aligned} \quad (17)$$

と展開する. 混合マルコフ劣化ハザードモデルの異質性パラメータ ε の確率分布とその確率分布のパラメータ ϕ の事前分布が階層構造になっている. 階層ベイズ推計では, 未知パラメータ $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ の事前分布を設定し, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数を算出する. 階層ベイズモデルに対しては代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法やメトロポリス・ヘイスティング法 (以下, MH 法) を組み合わせて事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている¹⁶⁾.

(2) 事後分布の定式化

いま, パラメータ $\theta = (\beta_1, \dots, \beta_{I-1}, \phi, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^K)$ を与件とする. このとき, 目視点検データ Ξ が観測される同時生起確率 (尤度) $\mathcal{L}(\theta|\Xi)$ は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta|\Xi) &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \pi_{ij}(\bar{z}^{l_k}, \bar{x}^{l_k}|\beta, \phi, \varepsilon^k) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \sum_{m=i}^j \psi_{ij}^m(\tilde{\lambda}^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k} \varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \end{aligned} \quad (18)$$

と表される. ただし, $\tilde{\lambda}^{l_k} = (\tilde{\lambda}_1^{l_k}, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k})$ である.

また, 式 (17) の未知パラメータ $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ の事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ をそれぞれ以下のように設定する. まず, β_i の事前確率密度関数 $\pi(\beta_i)$ として多次元正規分布を用いる. すなわち, $\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ である. ただし, $\mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ は期待値ベクトルを μ_i , 分散共分散行列を Σ_i とした M 次元正規分布である. ε^k の事前確率密度関数 $\pi(\varepsilon^k|\phi)$ はガンマ分布 (6) としてすでに与えられている. さらに, 式 (6) のガンマ分布の制御パラメータ ϕ の事前確率密度関数 $\pi(\phi)$ としてガンマ分布 $h(\phi|\alpha_0, \gamma_0)$ を設定する. すなわち, $\varepsilon^k \sim \mathcal{G}(\phi, 1/\phi)$, $\phi \sim \mathcal{G}(\alpha_0, \gamma_0)$ である.

したがって, 同時事後確率密度関数は,

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\Xi) &\propto \mathcal{L}(\theta|\Xi) \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^K \pi(\beta_i)\pi(\varepsilon^k|\phi)\pi(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \sum_{m=i}^j \psi_{ij}^m(\tilde{\lambda}^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k} \varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \mu_i)\Sigma_i^{-1}(\beta_i - \mu_i)' \right\} \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^K \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon^k) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\gamma_0^{\alpha_0} \Gamma(\alpha_0)} \phi^{\alpha_0-1} \exp\left(-\frac{\phi}{\gamma_0}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

のように定式化することができる.

(3) 同時事後確率密度関数の推計

未知パラメータを推計するためには式 (19) で表される同時事後確率密度関数を求める必要がある. しかしながら, 上述したように, 同時事後確率密度関数を解析的に求めることはもとより, 同時事後確率密度関数から直接サンプリングすることも困難となっている. そこで本研究では代表的な MCMC 法の 1 つであるギブスサンプリングの考え方にに基づき, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて数値計算により式 (19) の同時事後確率密度関数を算出する. なお, ギブスサンプリングにおける各パラメータの条件付き事後確率密度関数の算出に際しても事後分布から直接サンプリングすることは困難であるために, それぞれに対して MH 法を用いる必要がある.

はじめに混合マルコフ劣化ハザードモデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して同時事後確率密度関数を算出する. 未知パラメータの部分ベクトル β から β_{e_1} ($e_1 = 1, \dots, I-1$) を除いた未知パラメータベクトルを β^{-e_1} と表すことにする. また, 同様に未知パラメータの部分ベクトル ε から ε_{e_2} ($e_2 = 1, \dots, K$) を除いた未知パラメータベクトルを ε^{-e_2} と表す. このとき, 式 (19) より, $\beta^{-e_1}, \phi, \varepsilon$ を既知とした時の β_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e_1}|\beta^{-e_1}, \phi, \varepsilon, \Xi)$ は,

$$\begin{aligned} \pi(\beta_{e_1}|\beta^{-e_1}, \phi, \varepsilon, \Xi) &\propto \prod_{i=1}^{e_1} \prod_{j=e_1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \tilde{\lambda}_{e_1}^{l_k} \delta_{ij}^{l_k} - \delta_{ie_1}^{l_k} \sum_{m=i}^{j-1} \prod_{s=i}^{m-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_s^{l_k} - \tilde{\lambda}_m^{l_k}} \right. \\ &\quad \cdot \prod_{s=m}^{j-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{s+1}^{l_k} - \tilde{\lambda}_m^{l_k}} \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k} \varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \left. \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_{e_1} - \mu_{e_1})\Sigma_{e_1}^{-1}(\beta_{e_1} - \mu_{e_1})' \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

と表せる. ただし, $\delta_{ie_1}^{l_k}$ は, 点検サンプル k の事前健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k}) = i$ とサンプリングする際の事前健全度 e_1 が一致した場合に 1 を, そうでない場合に 0 をとるダミー変数である. また, $\beta, \phi, \varepsilon^{-e_2}$ を既知とした時の ε_{e_2}

の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\varepsilon_{e_2}|\beta, \phi, \varepsilon^{-e_2}, \Xi)$ は,

$$\pi(\varepsilon_{e_2}|\beta, \phi, \varepsilon^{-e_2}, \Xi) \propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{l_{e_2}=1}^{L_{e_2}} \left\{ \sum_{m=i}^j \psi_{ij}^m(\tilde{\lambda}^{l_{e_2}}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_{e_2}} \varepsilon_{e_2} \tilde{z}^{l_{e_2}}) \right\}^{\delta_{ij}^{l_{e_2}}} \cdot (\varepsilon_{e_2})^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon_{e_2}) \quad (21)$$

と表せる. さらに, β, ε を既知とした時の ϕ の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\phi|\beta, \varepsilon, \Xi)$ は,

$$\pi(\phi|\beta, \varepsilon, \Xi) \propto \prod_{k=1}^K \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon^k) \cdot \frac{1}{\gamma_0^{\alpha_0} \Gamma(\alpha_0)} \phi^{\alpha_0-1} \exp\left(-\frac{\phi}{\gamma_0}\right) \quad (22)$$

と表すことができる. これらの条件付き確率密度関数を用いて式 (19) の同時事後確率密度関数をギブスサンプリングにより算出する. 具体的な手順を以下と図-3にまとめる.

ステップ 1 先験的情報を用いて事前分布のパラメータ値 $\mu, \Sigma, \alpha_0, \gamma_0$ を設定する. それらはこれから推計するパラメータの制約条件となる. 本研究では無条件事前分布として分散のパラメータ値を大きく設定することとする. また, 未知パラメータ $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ の初期値 $\theta^{(0)} = (\beta^{(0)}, \phi^{(0)}, \varepsilon^{(0)})$ を設定する. 初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れていく.

ステップ 2-1 サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\beta^{(n)}$ を次のように発生させる.

$\beta_1^{(n)}$ を $\pi(\beta_1|\beta^{-1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

$\beta_2^{(n)}$ を $\pi(\beta_2|\beta^{-2(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

...

$\beta_{I-1}^{(n)}$ を $\pi(\beta_{I-1}|\beta^{I-1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-2 サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\varepsilon^{(n)}$ を次のように発生させる.

$\varepsilon_1^{(n)}$ を $\pi(\varepsilon_1|\beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{-1(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

$\varepsilon_2^{(n)}$ を $\pi(\varepsilon_2|\beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{-2(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

...

$\varepsilon_K^{(n)}$ を $\pi(\varepsilon_K|\beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{-K(n-1)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

ステップ 2-3 サンプリング回数 n の未知パラメータの要素 $\phi^{(n)}$ を $\pi(\phi|\beta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \Xi)$ からランダムサンプリングする.

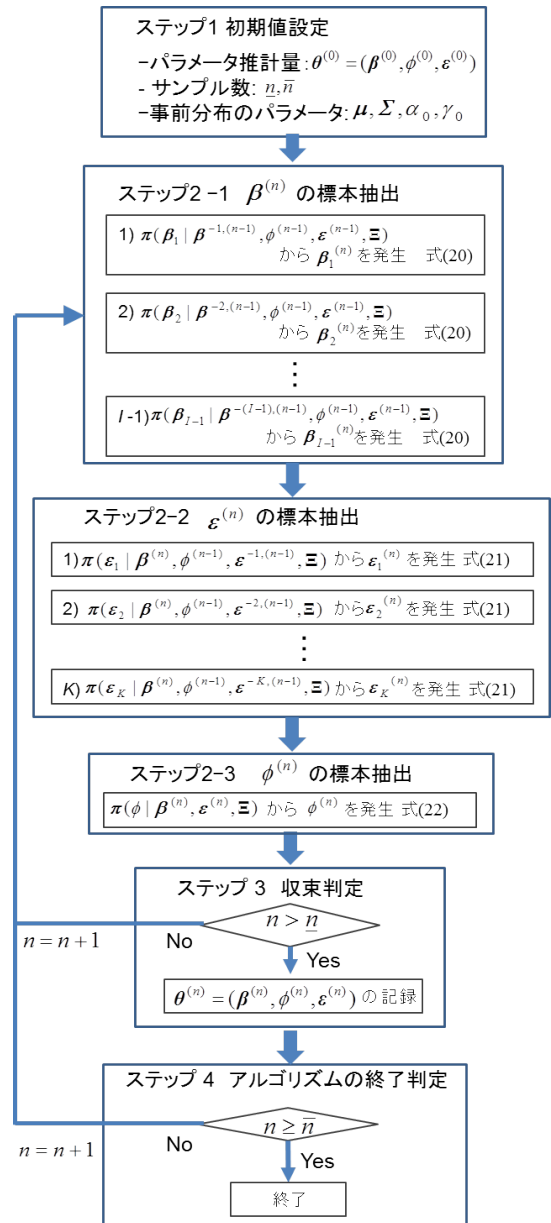


図-3 階層ベイズ推計アルゴリズム

ステップ 3 十分大きな \underline{n} に対して $n > \underline{n}$ ならば $\theta^{(n)} = (\beta^{(n)}, \phi^{(n)}, \varepsilon^{(n)})$ を記録する.

ステップ 4 $n = \bar{n}$ ならば計算を終了する. $n < \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ としステップ 2 へ戻る.

以上のギブスサンプリングにおいて, 推移核を

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}(\theta(n-1), \theta(n)|\Xi) \\ &= \prod_{e_1=1}^{I-1} \pi(\beta_{e_1}^{(n)}|\beta^{-e_1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi) \\ & \cdot \prod_{e_2=1}^K \pi(\varepsilon_{e_2}^{(n)}|\beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{-e_2(n-1)}, \Xi) \\ & \cdot \pi(\phi^{(n)}|\beta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \Xi) \end{aligned} \quad (23)$$

と定義する. このとき, $\theta(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) は推移核 $\mathcal{Q}(\theta(n-1), \theta(n)|\Xi)$ を持つマルコフ連鎖である. さ

に、このマルコフ連鎖の定常状態を $\pi(\theta|\Xi)$ と表す。十分大きな \underline{n} に対して、このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば、ギブスサンプリングによる $\theta(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ のサンプリングは式 (19) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ からのサンプリングと等しくなる。したがって、ギブスサンプリングによって得られるこれらの標本 $\theta(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ を用いて、パラメータベクトル $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる。ただし、ステップ 2 で利用する条件付き事後確率密度関数 (式 (20), (21), (22)) からは直接にランダムサンプリングすることができない。

(4) 条件付き事後確率密度関数からのサンプリング

直接サンプリングできない条件付き事後確率密度関数 (式 (20), (21), (22)) からの標本を得るために MH 法を用いる。具体的には $\pi(\beta_{e_1}^{(n)}|\beta^{-e_1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)$ からのサンプリングに対してランダムウォーク MH 法を、 $\pi(\varepsilon_{e_2}^{(n)}|\beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{-e_2(n-1)}, \Xi)$ と $\pi(\phi^{(n)}|\beta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \Xi)$ からのサンプリングに対しては独立 MH 法を、それぞれ適用する。

MH 法自体に新規性はないがそれぞれのサンプリング手法を見直し良くするために説明を加える。MH 法では事後分布 (目標分布) からのサンプリングが難しい場合に、これを近似するような分布 (提案分布) からサンプリングを行う。これと同時に目標分布と提案分布の差異を修正する。これらの操作を 4.(3) で示したギブスサンプリングの手順に従い繰り返したとき、十分に大きな繰り返し回数においてサンプリングされた標本は目標分布からランダムサンプリングされた標本と見なすことができる¹⁶⁾。

いま、目標分布を $\pi(\hat{\theta}|\hat{\Xi})$ と表す。提案分布の確率密度関数を $q(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)})$ と表す。提案分布を用いて n 回目のサンプリングで事後分布からの標本の候補として $q(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)})$ に従う標本 $\hat{\theta}'$ を発生させる。提案された標本 $\hat{\theta}'$ は目標分布 $\pi(\hat{\theta}|\hat{\Xi})$ からの標本ではないために、その差異を修正するために、確率

$$\alpha(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\hat{\theta}'|\hat{\Xi})q(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)})}{\pi(\hat{\theta}^{(n-1)}|\hat{\Xi})q(\hat{\theta}^{(n-1)}|\hat{\theta}')}, 1 \right] \quad (24)$$

に従って受容し、 $\hat{\theta}^{(n)} = \hat{\theta}'$ とする。また、棄却された場合には $\hat{\theta}^{(n)} = \hat{\theta}^{(n-1)}$ とする。

a) β のサンプリング

選択する提案分布により様々な MH 法が考案されている。1つの基本的な方法は、 n 回目の候補を

$$\hat{\theta}' = \hat{\theta}^{(n-1)} + \mathcal{N}(0, \mathbf{I}\nu) \quad (25)$$

で表されるランダムウォークにより発生させる。なお、 $\mathcal{N}(0, \nu\mathbf{I})$ は 0 ベクトルを平均、 $\nu\mathbf{I}$ を分散共分散行列とした多次元正規分布であり、 \mathbf{I} は単位行列を表す。 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ はステップ幅を定めるパラメータベクトルである。このとき、提案分布の確率密度 q は $(\hat{\theta}', \hat{\theta}^{(n-1)})$ に関して対称となるために、ランダムウォークにより発生させた候補 $\hat{\theta}'$ は確率

$$\alpha_r(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\hat{\theta}'|\hat{\Xi})}{\pi(\hat{\theta}^{(n-1)}|\hat{\Xi})}, 1 \right] \quad (26)$$

で受容される。上述したように本研究では条件付き事後確率密度 $\pi(\beta_{e_1}^{(n)}|\beta^{-e_1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)$ をランダムウォーク MH 法によりサンプリングする。このとき、 $\tilde{\theta}' = \beta_{e_1}'$ 、 $\tilde{\theta}^{(n-1)} = \beta_{e_1}^{(n-1)}$ とした式 (25) のランダムウォークより発生される n 回目の候補 β_{e_1}' が受容される確率は、

$$\alpha_\beta(\beta_{e_1}'|\beta_{e_1}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\beta_{e_1}'|\beta^{-e_1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)}{\pi(\beta_{e_1}^{(n-1)}|\beta^{-e_1(n-1)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{(n-1)}, \Xi)}, 1 \right] \quad (27)$$

と定義できる。実際の数値計算では区間 $[0, 1]$ で定義される一様分布 $\mathcal{U}(0, 1)$ から、一様乱数 $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ を発生させ、 $\beta_{e_1}^{(n)}$ を以下のルールに従い決定する。

$$\beta_{e_1}^{(n)} = \begin{cases} \beta_{e_1}^{(n-1)} & u > \alpha_\beta \\ \beta_{e_1}' & u \leq \alpha_\beta \end{cases} \quad (28)$$

以上は 4.(3) で示したギブスサンプリングのステップ 2-1 に相当する。

b) ε と ϕ のサンプリング

一方で、事後分布の制約を考慮して提案分布を選択することも考えられる。特に $q(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)}) = q(\hat{\theta}')$ のような確率密度を有する提案分布を用いる方法は独立 MH 法と呼ばれ、広く利用されている。このとき、独立 MH 法の提案分布により発生させた候補 $\hat{\theta}'$ が受容される確率は次式で定義できる。

$$\alpha_i(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\hat{\theta}'|\hat{\Xi})q(\hat{\theta}^{(n-1)})}{\pi(\hat{\theta}^{(n-1)}|\hat{\Xi})q(\hat{\theta}')}, 1 \right] \quad (29)$$

混合マルコフ劣化ハザードモデルにおける条件付き事後確率密度関数 $\pi(\varepsilon_{e_2}^{(n)}|\beta^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \varepsilon^{-e_2(n-1)}, \Xi)$ と $\pi(\phi^{(n)}|\beta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \Xi)$ はともに定義域が 0 以上という制約を有している。本研究ではこれを満たす提案分布として各パラメータの事前分布 $\mathcal{G}(\phi, \phi^{-1})$ 、および $\mathcal{G}(\alpha_0, \gamma_0)$ をそれぞれ採用することにする。条件付き事後確率密度関数を式 (29) に対応させてそれぞれ整理する。まず提案分布 $\mathcal{G}(\varepsilon'|\phi, \phi^{-1})$ より発生させた n 回目の候補 ε' が受容される確率は、

$$\alpha_\varepsilon(\varepsilon_{e_2}'|\varepsilon_{e_2}^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\mathcal{L}(\varepsilon_{e_2}'|\beta^{(n)}, \varepsilon^{-e_2(n-1)}, \Xi)}{\mathcal{L}(\varepsilon_{e_2}^{(n-1)}|\beta^{(n)}, \varepsilon^{-e_2(n-1)}, \Xi)}, 1 \right] \quad (30)$$

と表現できる. 同様に, 提案分布 $\mathcal{G}(\phi'|\alpha_0, \gamma_0)$ より発生させた n 回目の候補 ϕ' が受容される確率は,

$$\alpha_\phi(\phi'|\phi^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\mathcal{L}(\phi'|\varepsilon^{(n)})}{\mathcal{L}(\phi^{(n-1)}|\varepsilon^{(n)})}, 1 \right] \quad (31)$$

と表現できる. 実際の数値計算上での取扱はいずれのパラメータも式 (28) と同様である. 以上は **4.(3)** で示したギブスサンプリングの**ステップ 2-2**, **ステップ 2-3** にそれぞれ相当する.

(5) 事後分布に関する統計量

MCMC 法を用いた場合, パラメータの事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\Xi)$ は解析的な関数として表現できない. 得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推計することとなる. いま, MCMC 法により得られた標本を $\boldsymbol{\theta}^{(n)} = (\boldsymbol{\beta}^{(n)}, \phi^{(n)}, \varepsilon^{(n)}) = (\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \dots, \theta_{K_\theta}^{(n)})$ ($n = 1, \dots, \bar{n}$) と表すこととする. なお, $K_\theta = M(I-1) + K + 1$ である. このうち, 最初の \underline{n} 個を事後分布への収束過程からの標本と考え, 標本集合から除去する. その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義する. このとき, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の同時確率分布関数 $G(\boldsymbol{\theta})$ は

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\#\{\boldsymbol{\theta}^{(n)} \leq \boldsymbol{\theta}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (32)$$

と表すことができる. ただし, $\#\{\boldsymbol{\theta}^{(n)} \leq \boldsymbol{\theta}, n \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\boldsymbol{\theta}^{(n)} \leq \boldsymbol{\theta}, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である. また, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\theta})$, 分散・共分散行列 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\theta})$ は, それぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\theta}) &= (\tilde{\zeta}(\theta_1), \dots, \tilde{\zeta}(\theta_{K_\theta}))' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\theta_1^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\theta_{K_\theta}^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\theta_1) & \dots & \tilde{\sigma}(\theta_1, \theta_{K_\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\theta_{K_\theta}, \theta_1) & \dots & \tilde{\sigma}^2(\theta_{K_\theta}) \end{pmatrix} \quad (33b)$$

と表される. ただし,

$$\tilde{\sigma}^2(\theta_{k_\theta}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\theta_{k_\theta}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\theta_{k_\theta})\}^2}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\theta_{k_\theta}, \theta_{l_\theta}) \\ = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\{\theta_{k_\theta}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\theta_{k_\theta})\} \{\theta_{l_\theta}^{(n)} - \tilde{\zeta}(\theta_{l_\theta})\}}{\bar{n} - \underline{n}} \end{aligned} \quad (34b)$$

である. また, ギブスサンプリングによる標本を用いて, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の信用区間を定義できる. $100(1-2\kappa)\%$ 信用区間は, 標本順序統計量 $(\theta_{k_\theta}^{\kappa}, \bar{\theta}_{k_\theta}^{\kappa})$ ($k_\theta = 1, \dots, K_\theta$)

$$\begin{aligned} \theta_{k_\theta}^{\kappa} &= \arg \max_{\theta_{k_\theta}^*} \\ &\left\{ \frac{\#\{\theta_{k_\theta}^{(n)} \leq \theta_{k_\theta}^*, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{k_\theta}^{\kappa} &= \arg \min_{\theta_{k_\theta}^{**}} \\ &\left\{ \frac{\#\{\theta_{k_\theta}^{(n)} \geq \theta_{k_\theta}^{**}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \end{aligned} \quad (35b)$$

を用いて $\theta_{k_\theta}^{\kappa} < \theta_{k_\theta} < \bar{\theta}_{k_\theta}^{\kappa}$ と定義できる.

MCMC 法では, 初期パラメータ値 $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない. ギブスサンプリングで発生させた \bar{n} 個のサンプルのうち, 最初の \underline{n} 個の標本 $\boldsymbol{\theta}^{(n)}$ ($n = 1, \dots, \underline{n}$) を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える. その上で, 第 $\underline{n} + 1$ 回以降の標本をとりあげる. $\underline{n} + 1$ 以降の標本が, 不変分布である事後分布からの標本であるかどうかを Geweke の方法³³⁾を用いて仮説検定を試みる. いま, パラメータのギブス標本 $\boldsymbol{\theta}^{(n)}$ ($n = \underline{n}, \dots, \bar{n}$) の中から, 最初の n_1 個と最後の n_2 個のデータを取りあげる. Geweke は, $n_1 = 0.1(\bar{n} - \underline{n}), n_2 = 0.5(\bar{n} - \underline{n})$ を推奨している³³⁾. このとき, パラメータ θ_{k_θ} の不変分布への収束を判断するための Geweke 検定統計量は,

$$Z_{\theta_{k_\theta}} = \frac{1\bar{\theta}_{k_\theta} - 2\bar{\theta}_{k_\theta}}{\sqrt{\nu_1^2(\theta_{k_\theta}) + \nu_2^2(\theta_{k_\theta})}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (36)$$

$$1\bar{\theta}_{k_\theta} = \frac{\sum_{k=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} \theta_{k_\theta}^{(k)}}{n_1} \quad 2\bar{\theta}_{k_\theta} = \frac{\sum_{k=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} \theta_{k_\theta}^{(k)}}{n_2}$$

$$\nu_1^2(\theta_{k_\theta}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^1(0)}{n_1} \quad \nu_2^2(\theta_{k_\theta}) = \frac{2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^2(0)}{n_2}$$

と定義できる. ただし, $f_{\theta_{k_\theta}}^l(x)$ ($l = 1, 2$) はスペクトル密度関数であり, $2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^l(0)$ の推計値は

$$2\pi \hat{f}_{\theta_{k_\theta}}^l(0) = l\hat{\omega}_0 + 2 \sum_{s=1}^q w(s, q) l\hat{\omega}_m^i \quad (37)$$

$$1\hat{\omega}_0 = n_1^{-1} \sum_{g=\underline{n}+1}^{\underline{n}+n_1} (\theta_{k_\theta}^{(g)} - 1\bar{\theta}_{k_\theta})^2$$

$$2\hat{\omega}_0 = n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+1}^{\bar{n}} (\theta_{k_\theta}^{(g)} - 2\bar{\theta}_{k_\theta})^2$$

$$1\hat{\omega}_m^i = n_1^{-1} \sum_{g=\underline{n}+s+1}^{\underline{n}+n_1} (\theta_{k_\theta}^{i,g} - 1\bar{\theta}_{k_\theta})(\theta_{k_\theta}^{(g-s)} - 1\bar{\theta}_{k_\theta})$$

$$2\hat{\omega}_m^i = n_2^{-1} \sum_{g=\bar{n}-n_2+s+1}^{\bar{n}} (\theta_{k_\theta}^{(g)} - 2\bar{\theta}_{k_\theta})(\theta_{k_\theta}^{(g-s)} - 2\bar{\theta}_{k_\theta})$$

$$w(s, q) = 1 - \frac{s}{q+1}$$

として求まる^{34), 35)}. q はスペクトル密度の近似度を表すパラメータであるが, Geweke に従って 20 を採用する³³⁾. ここで, θ_{k_θ} の不変分布への収束性に関する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : |Z_{\theta_{k_\theta}}| \leq z_{\psi/2} \\ H_1 : |Z_{\theta_{k_\theta}}| > z_{\psi/2} \end{cases} \quad (38)$$

と設定する. ただし, $z_{\psi/2}$ は帰無仮説を棄却するため

の臨界的な値である。有意水準 $\psi\%$ で帰無仮説を仮説検定する場合、 $z_{\psi/2}$ は $\psi/2\% = 1 - \Phi(z_{\psi/2})$ を満足する値として定義できる。ただし、 $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数である。

5. 実証分析

(1) データベースの概要

本研究で提案した方法論の有効性を検討するために、ニューヨーク市（以下、NY市）が管理する橋梁の目視点検データを用いて、混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計を試みる。モデル化の具体的な劣化事象としてRC床版を取り上げる。NY市のRC床版に対する目視点検の7段階の健全度評価基準を表-1に示す。本研究では、1987年から1996年にかけて実施された目視点検データをもとにデータベースを作成し、このデータベースを用いて混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータを推計した。データベースでは、各橋梁部材ごとに識別番号が割り当てられており、これにより同一部材の点検履歴を把握することができる。さらに、部材ごとに、構造特性や環境条件に関する情報が収録されている。また、異質性パラメータを設定するRC床版のグループ単位を橋梁単位とした。これにより、グループ総数は1,481となった。同一グループ（橋梁）の中に属するRC床版の説明変数は全て同一の値をとるものとする。さらに、5.(2)で述べるように説明変数として採用した平均交通量、床版面積に関する情報が同時に利用可能であるサンプルのみを抽出した。なお、補修の実施や、点検誤差などの理由により、健全度が前回の目視点検時点より回復しているサンプルは予め除外した。除外したサンプル数は4,623個であり、そのうち点検誤差と見られるサンプル数は約1,500個である。NY市の目視点検結果データの信頼性は定評があるが、それでも若干の点検誤差と思われるサンプルが存在している。今後、目視点検の精度向上は橋梁マネジメントにおける重要な研究課題になると考える。以上のサンプル抽出の結果、混合マルコフ劣化ハザードモデルの推計のために、合計32,902個のサンプルが利用可能となった。なお、これ以降の分析では、平均交通量および床版面積のデータに対して、全サンプル32,902個の中のそれぞれの最大値が1となるように基準化した。

(2) 推計結果

NY市のデータベースを用いて、混合マルコフ劣化ハザードモデルを階層ベイズ推計した。RC床版の健全度が7段階の健全度で評価されているので、健全度7の状態を除く合計6つの健全度に対して、混合マルコフ

表-1 7段階健全度評価基準³⁶⁾

健全度	物理的な意味 (RC床版)
1	新設状態, 劣化の兆候がほとんどみられない。
2	1と3の間
3	一部分で漏水が確認できる。(漏水を伴う一方向ひび割れ, 端部で斑点状の漏水)
4	3と5の間
5	床版面積75%以上から漏水が確認できる。一部分で剥離や剥落が確認できる。桁上フランジに沿った遊離石灰が確認できる。
6	5と7の間
7	深刻な剥落や遊離石灰が確認できる。抜け落ちやその傾向が確認できる。

注) 実際のNY市の健全度評価では、新設状態を健全度7に、以降劣化が進行するほど健全度番号が小さくなるように健全度が定義されている。

劣化ハザードモデルを定義できる。標準ハザード率の説明変数の候補として、データベースで利用可能な情報（具体的には、平均交通量、床版面積、車線数、路線など）を取り上げ、それらの説明変数を組み合わせ、標準ハザード率を推計した。その中で、有意水準5%のGeweke検定で棄却されず、符号条件を満足し、かつ $\kappa = 5$ としたときの事後分布の90%信頼区間 $(\theta_{k\theta}^{\kappa}, \bar{\theta}_{k\theta}^{\kappa})$ に0を含まない（説明変数が説明力を有する）説明変数の組み合わせを選択した。

表-2には以上の手順で推計した混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータの事後分布の期待値 $\hat{\beta}$, $\hat{\phi}$, 90%信頼区間 $(\theta_{k\theta}^{\kappa}, \bar{\theta}_{k\theta}^{\kappa})$, およびGeweke検定統計量を示す。ギブズサンプリングによるサンプル発生数に関しては、 $\underline{n} = 2,000$, $\bar{n} = 12,000$ とした。Geweke検定統計量はいずれも有意水準5%の閾値である1.96を下回っており、事後分布に収束していることがわかる。いくつかの未知パラメータに対する10,000サンプルを用いた標本分布を図-4に示す。信頼区間が0を含むか否かにより各説明変数の有意性を確認できる。有意床版グループ $k(k = 1, \dots, 1,481)$ のRC床版に対する個別ハザード率を、具体的に書き表せば、

$$\lambda_i^k = \exp(\beta_{i,1} + \beta_{i,2}x_2^k + \beta_{i,3}x_3^k)\varepsilon^k \quad (39)$$

$$(i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, 1,481)$$

となる。ただし、 x_2^k は平均交通量、 x_3^k は床版面積、 ε^k は床版グループ $k(k = 1, \dots, 1,481)$ の劣化特性を表す異質性パラメータである。また、表-3には比較のために、段階的最尤法³⁾による結果を掲載する。採用された説明変数（平均交通量、床版面積）は同一であり、説明力に関する仮説を尤度比検定により棄却されない説明変数も健全度4の床版面積 $\beta_{4,3}$ を除いて同一であった。ただし、両推計結果を比較すると、未知パラメータの値が乖離しているケースも存在する。さらに、分散パラメータ（分散の逆数） ϕ を比較すると、階層ベイズ推

表-2 階層ベイズ推計の結果

事後分布 統計量	健全度	定数項	平均交通量	床版面積
		$\beta_{i,1}$	$\beta_{i,2}$	$\beta_{i,3}$
期待値	1	-0.241		1.567
(下限 5%, 上限 5%)		(-0.343, -0.143)	-	(0.111, 2.743)
Geweke 検定統計量		-0.065		0.342
期待値	2	-1.027		3.121
(下限 5%, 上限 5%)		(-1.100, -0.952)	-	(2.511, 4.118)
Geweke 検定統計量		-0.103		0.193
期待値	3	-1.794	0.677	
(下限 5%, 上限 5%)		(-1.870, -1.720)	(0.452, 0.913)	
Geweke 検定統計量		0.107	-0.150	
期待値	4	-2.827	1.122	
(下限 5%, 上限 5%)		(-2.923, -2.738)	(0.851, 1.411)	-
Geweke 検定統計量		0.177	-0.202	
期待値	5	-3.087		
(下限 5%, 上限 5%)		(-3.190, -2.987)	-	-
Geweke 検定統計量		0.242		
期待値	6	-3.464	3.568	
(下限 5%, 上限 5%)		(-3.723, -3.154)	(2.786, 4.211)	-
Geweke 検定統計量		0.312	-0.202	
期待値	分散パラメータ ϕ		1.096	
(下限 5%, 上限 5%)			(1.056, 1.186)	
Geweke 検定統計量			2.460	
対数尤度			-16,981	

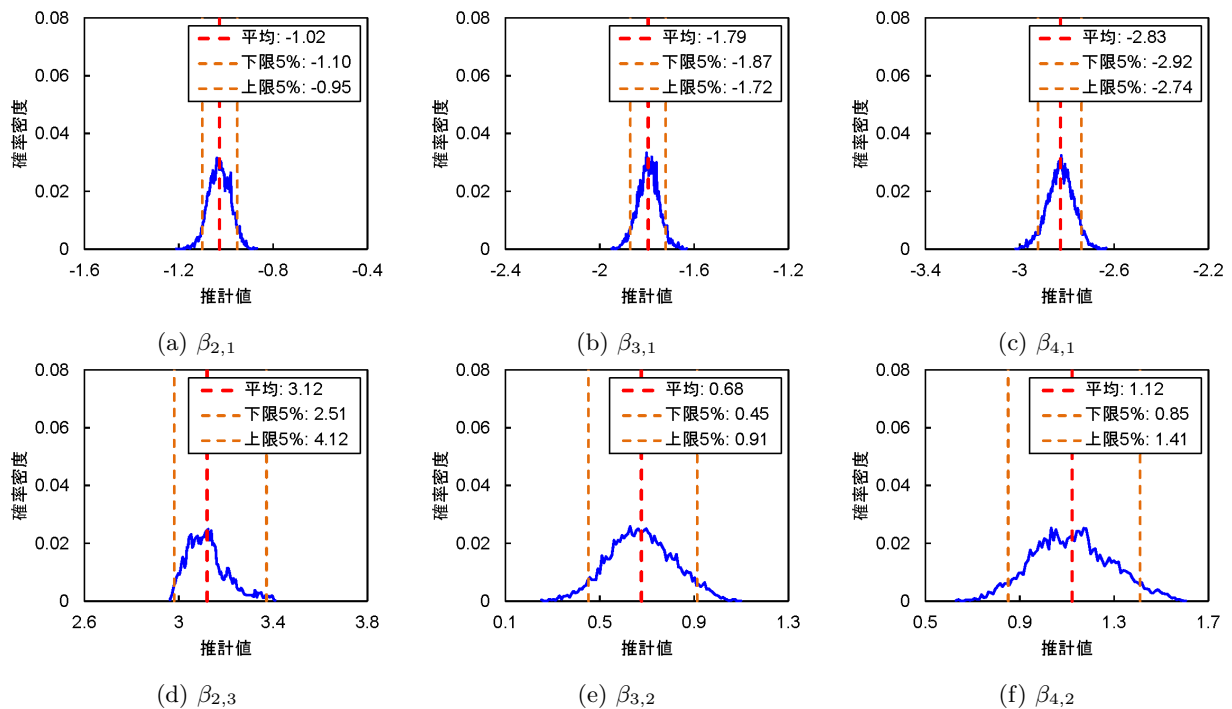


図-4 β の推計結果 (一部)

計では1.096に対して、段階的最尤法では5.537となっている。これは階層ベイズ推計の方が異質性パラメータの分布として仮定したガンマ分布の分散が大きくなることを示している。また、混合マルコフ劣化ハザードモデルを同時最尤推計、あるいは階層ベイズ推計した場合には、対数尤度に加えてAIC等の情報量規準を算出することが可能であるが、段階的最尤推計³⁾では全

未知パラメータを対象とした対数尤度を算出することができない。推計精度に関する評価ができないことも段階的最尤法の欠点である。

(3) 期待劣化パス

5.(2)の推計結果を用いて、混合マルコフ劣化ハザードモデルの期待劣化パスを算出する。平均交通量 x_2^k ,

表-3 段階的最尤推計の結果³⁾

健全度	定数項	平均交通量	床版面積
	$\beta_{i,1}$	$\beta_{i,2}$	$\beta_{i,3}$
1	-1.040	-	3.156 (7.7)
2	-1.507	-	3.331 (67.6)
3	-1.962	0.717 (63.0)	-
4	-2.459	0.871 (45.1)	0.515 (12.9)
5	-2.360	-	-
6	-1.998	1.547 (14.8)	-
分散パラメータ		5.537 (20.7)	
ϕ			
対数尤度		-20,062	

注) 括弧内は尤度比検定統計量を示している。

床版面積 x_3^k と、健全度 i の標準ハザード率の推計値を用いれば、当該床版グループに関する劣化状態 i ($i = 1, \dots, I - 1$) の標準ハザード率は、

$$\lambda_i^k = \exp(\beta_{i,1} + \beta_{i,2}x_2^k + \beta_{i,3}x_3^k) \quad (40)$$

と定義できる。式 (40) は、混合マルコフ劣化ハザードモデルにおいて、異質性パラメータを $\epsilon^k = 1$ に設定した場合に他ならない。このように異質性パラメータの値を 1 に設定することにより、床版グループの平均的な劣化過程を表現できる。さらに、標準ハザード率を用いれば、当該床版グループの各劣化状態における期待寿命 (任意の健全度における滞在時間) ET_i^k は、式 (7) を用いて、

$$ET_i^k = \int_0^\infty d\tilde{F}_i(y_i^k) = \frac{1}{\lambda_i^k} \quad (41)$$

と表される。また、初期時点 (あるいは直近の補修時点) から、健全度 i ($i = 2, \dots, I$) に進展するまでに要する平均的所要時間 $E[T](i)$ は、

$$E[T](i) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{\lambda_j^k} \quad (42)$$

と定義でき、これを期待劣化パスと呼ぶ。階層ベイズ推計と段階的最尤推計により算出した期待劣化パスを図-5 に示す。ただし、平均交通量および床版面積は全サンプルの平均値 0.2275, 0.0411 に設定した。図-5 に示すように段階的最尤法³⁾によって求めた期待劣化パスは、階層ベイズ法を用いて求めた期待劣化パスよりも、1) 健全度が良好な段階では劣化速度が小さく、逆に 2) 健全度が悪化するにつれて、逆に劣化速度を大きく評価する結果となっている。このように、段階的最尤法と用いた推計結果と階層ベイズ法を用いて求めた推計結果の間には、明らかな差異が存在する。

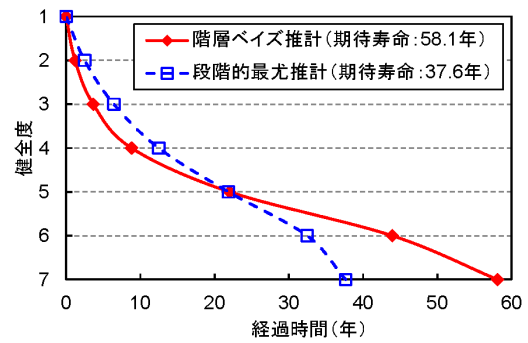


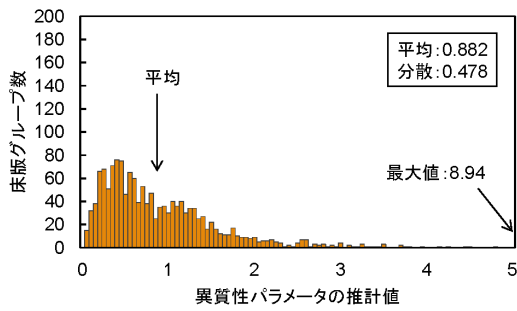
図-5 期待劣化パスの比較

(4) 異質性を考慮した劣化パス

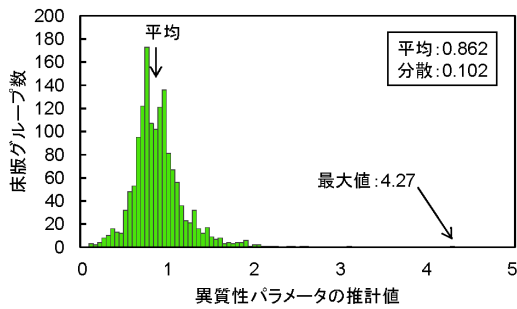
階層ベイズ法では表-2 の推計結果に加え、1,481 個の床版グループに対する異質性パラメータも同時に推計している。1,481 個の床版グループに対して異質性パラメータの期待値を算出し、その頻度分布を求めた結果を図-6(a) に示している。比較のために図-6(b) に段階的最尤法³⁾による異質性パラメータの推計結果も示している。図-6(a) の異質性パラメータの頻度分布の平均は 0.882, 分散は 0.478 である (図-6(b) は平均: 0.862, 分散: 0.102)。また、異質性パラメータの最小値は 0.007, 最大値は 8.942 であった (図-6(b) は最小値 0.064, 最大値: 4.266)。表-2 の分散パラメータ ϕ の推計結果で確認したように、階層ベイズ推計で算出した異質性パラメータ分布の方が分散が大きい。また、階層ベイズ推計では各異質性パラメータの確率分布や信頼域も算出することができる。

全 1,481 グループの床版に対して、異質性パラメータを用いてそれぞれの期待劣化パスを求めた。これらの期待劣化パスを一括して図-7 に示す。本研究で提案した混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いることにより、1,481 グループそれぞれの RC 床版の期待劣化パスを求めることが可能となる。図-7 に示すように、期待寿命が 10 年以下の RC 床版から、100 年以上の RC 床版が存在することがわかる。図-5 に示した全床版に対する期待劣化パスの期待寿命が約 58.1 年であったことを踏まえると、RC 床版の期待寿命には床版グループごとに大きな差異が存在することが理解できる。

図-8 は、全橋梁の中で異質性パラメータ値がもっとも大きい値 8.94 を示す橋梁に着目し、その床版の期待劣化パスと実際の目視点検データの関係を図示している。同橋梁では、説明変数として採用した平均交通量と床版面積は 0.367 と 0.0045 であり、サンプル平均 (平均交通量: 0.227, 床版面積: 0.0441) と比較すると交通量は大きいものの、床版面積が小さい。本橋を構成する床版数は 13 である。図中の凡例の数値は健全度の推移を示しており、たとえば「5-5-6-7-7」は同一床版



(a) 階層ベイズ推計



(b) 段階的最尤推計

図-6 異質性パラメータの推計結果

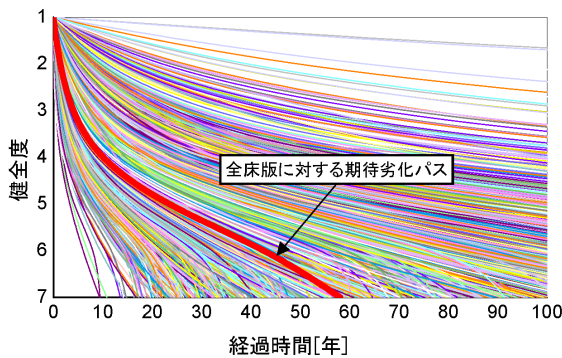


図-7 1,481 グループの期待劣化パス

に対して過去に5回の目視点検が行われ、健全度が5, 5, 6, 7, 7と推移したことを示している。凡例中の数値のペアを1サンプルとすると、今回の解析では図中に示す13の床版に対して、延べ68サンプル得られた。図-8に示すように、同橋の劣化速度は速く、8.5年で健全度が1から7へ推移している。また、階層ベイズ推計による期待劣化パスと実際の目視点検データとの整合性は高い。

(5) 推計バイアスに関する考察

段階的最尤法は取り扱いが簡便であるものの、2.(3)で述べたように、施設グループごとのサンプル数の違いに対応することができず、推計バイアスが発生することとなる。段階的最尤法では、第1段階の推計におい

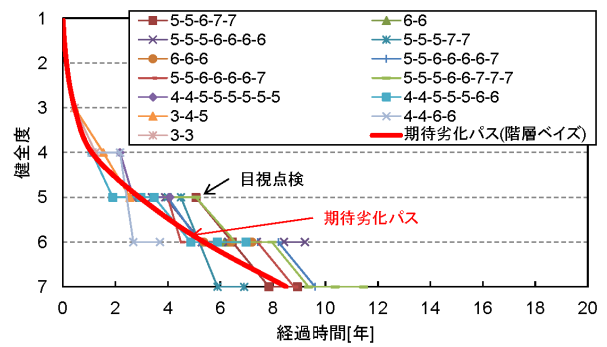


図-8 劣化曲線と目視点検データ

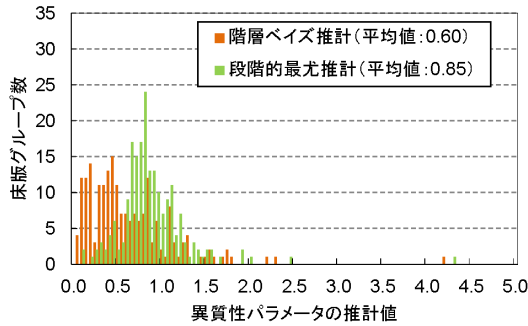
て異質性パラメータ以外の未知パラメータ β と ϕ を推計する³⁾。このとき、異質性パラメータをどのようなグループ単位に設定しようと、これらの未知パラメータの推計には何ら影響しない。すなわち、分散パラメータを考慮しているものの、実質的には総サンプル32,902個に対する平均的なマルコフ劣化ハザードモデルを推計しているに等しい。しかし、現実の目視点検においては、1) 劣化が進行している、もしくは劣化速度の早い施設に対して重点的に点検を実施する、2) 劣化が進展し、劣化速度が早い施設では、健全度が良好な段階における劣化過程に関する目視点検サンプルが欠落する可能性が大きい。このため、グループ単位でサンプルを収集した場合、1) 健全度が良好な段階においては劣化速度が大きいサンプルが相対的に欠落し、2) 劣化が進展した健全度に対しては劣化速度の大きいサンプルが重点的に観測される可能性が大きい。

表-4は1,481の床版グループの中で、事前健全度が6となる目視点検サンプルを1つでも有する床版グループ(橋梁)の数を示している。事前健全度が6の場合、事後健全度は6, 7の2ケースを取り得る。同表には1) 事後健全度も6(表中6-6)の床版グループ、2) 事後健全度が7(6-7)の床版グループ、3) 事後健全度が6、かつ7(6-6 & 6-7)という推移パターンを1つでも含む床版グループの数を示している。さらに、同表は事前健全度6という点検サンプルを1つでも有する床版グループのうち、同一グループを構成する床版の中で事前健全度が1~5と判断された床版を1つでも有するグループの数を示している。同表より、たとえば、事前健全度6から事後健全度7に変化するような点検サンプルを有する(いいかえれば、劣化が進行し、かつ劣化速度が相対的に早い)床版グループは、表-4に示すように、事前健全度が1~3と判定される点検サンプルが欠損している。2つの推計手法により算出された異質性パラメータのうち、事前健全度1の床版を1つでも有する床版グループに関する異質性パラメータの標本分布を図-9(a)に、事前健全度5に関する標本分布を図-9(b)にそれ

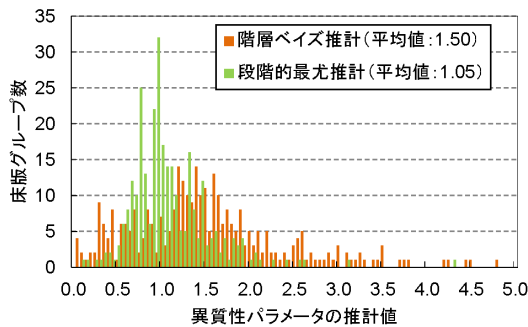
表-4 事前健全度 6 の床版グループが有するサンプル構成

健全度	床版グループ数		
	6-6	6-7	6-6 & 6-7
1	8	0	0
2	9	0	0
3	23	0	6
4	31	1	4
5	40	4	6
6のみ	0	0	1
総数	49	4	7

注) 表中の健全度の欄は事前の健全度を、数値は各健全度を有する床版グループ数をそれぞれ表している。たとえば、表中2行1列目の数値9は、事前の健全度が6で事後の健全度も6のデータを1つでも有するグループを対象として、そのグループを構成する床版の中で1つでも事前の健全度が2と判定された目視点検サンプルを有している床版が9個存在することを意味する。また、同一グループにおいて、異なる健全度に判定される床版が存在する。したがって、各列の健全度1から6までの総和をとると同一グループが重複して加算されるため、各列の最終行に示す該当床版グループの総数とは必ずしも一致しない。



(a) 事前健全度 1



(b) 事前健全度 5

図-9 異質性パラメータの比較

それぞれ示している。この2つの図より、健全度1を有する床版グループに関しては、階層ベイズ推計法を用いて推計した異質性パラメータの頻度分布が、段階的最尤法を用いた場合よりも相対的に小さい値をとっていることが読み取れる。一方、健全度が5の場合、逆に階層ベイズ法を用いた方が異質性パラメータの値が大きい値を示すサンプルが相対的に多い。本研究では床

版グループごとの各健全度における劣化速度は式(1)のように、標準ハザード率と異質性パラメータの積で表現される。したがって、図-5の期待劣化パスにおいて、健全度1から3の劣化速度に関しては階層ベイズ推計の方が標準ハザード率が大きく、逆に健全度が4より大きい場合には、階層ベイズ推計により求めた標準ハザード率が小さくなることを意味する。すなわち、健全度が悪く、しかも劣化速度の速い床版グループに対して、重点的に目視点検が実施されたために、このような特性を有するサンプル数が系統的に増加することとなり、段階的最尤法を用いた場合には標準ハザード率を過大推計する結果となる。逆に、健全度が良好な床版グループに関しては、劣化速度が速いサンプルが欠損するため、段階的最尤法を用いた場合、標準ハザード率を過小推計することとなる。

段階的最尤法では第1段階で床版グループごとのサンプル数の違いを考慮せずに、全てのサンプルをプーリングして β と ϕ を推計する。このため、各床版グループごとにサンプル数や健全度分布に無視できない偏りがある場合、マルコフ劣化ハザードモデルの推計結果に著しいバイアスが発生することとなる。一方、階層ベイズ推計法を用いた場合、同一の床版グループに属するサンプルが共通の異質性パラメータを有することが保証されるため、観測される劣化速度の頻度分布に歪みが発生していても、異質性パラメータの推計量はガンマ分布からベイズサンプリングされるので、床版グループ間の点検データ数の相違やグループ内の床版ごとの劣化速度のばらつきに起因する推計バイアスは発生しない。

6. おわりに

本研究では、個々の社会基盤施設の劣化過程に介入する異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推手法を提案した。具体的には、未知パラメータに対して階層的に事前分布を設定するとともに、MCMC法によってそれらを推計することで、最終的な推計結果を事後分布の統計量として評価する方法論を提示した。また、実際の橋梁床版に対する目視点検データを用いた実証分析において、既存の段階的最尤法との比較を通して提案手法の有効性を検証した。本研究で提案した階層ベイズ推計法を用いることにより、混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計する場合における過分散の問題に対応することが可能になることが判明したが、今後に残された課題を整理しておく。第1に異質性パラメータの階層化に関しては、さまざまな拡張が可能である。たとえば、路線単位で上位の異質性パラメータを設定し、各路線内の橋梁単位で下

位の異質性パラメータを設定することで、マクロな視点(路線単位)での劣化状況の把握とミクロな視点(橋梁単位)での劣化状況の把握を同時に実施できる。第2に、劣化速度の相対評価に基づく補修効果の定量的評価をあげる。異質性パラメータを補修前と後の同一部材にそれぞれ設定し、階層ベイズ推計を行うことで、補修後の劣化速度の変化を異質性パラメータの比で算出することができる。補修効果の事後的評価に関しては一部の社会基盤施設や部材を対象とした詳細な検討事例がいくつか存在するものの、施設全体を対象とした評価はなされていない。第3に、本研究で提案した手法は、劣化過程がマルコフ劣化ハザードモデルに従うことを前提として提案されたものである。劣化過程が、例えばワイブル劣化ハザードモデルに従う場合、混合多段階ワイブル劣化ハザードモデルを開発することが可能である。しかし、この場合には計算負荷が相当量になるため、MCMC法の高速化に関する研究が必要である。また、橋梁に関しては、実務においてもマルコフ推移過程を用いて劣化過程を表現することが一般的になっているが、推移過程のマルコフ性に関して統計的に検証されているわけではない。今後、点検データが蓄積されれば、マルコフ性の妥当性について検討することが必要である。第4に、本研究は橋梁を対象とした1つの事例を提示したに過ぎず、今後、混合マルコフ劣化ハザードモデル以外の統計的劣化予測手法への適用や、その他の社会基盤施設の劣化予測問題への適用を通して方法論を逐次改善していくことが重要である。

参考文献

- 小林潔司：土木工学における実践的研究：課題と方法，土木技術者実践論文集，土木学会，Vol.1，pp.143-155，2010.
- 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82，2005.
- 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
- Thompson, P.D., Small, E.P., Johnson, M., Marshall, A.R.: The Pontis bridge management system, *Structural Engineering International*, Vol.8, No.4, pp.303-308, 1998.
- Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- Mishalani, R. and Madanat, S.: Computation of infrastructure transition probabilities using stochastic duration models, *ASCE Journal of Infrastructure Systems*, Vol.8, No.4, pp.139-148, 2002.
- 青木一也，小田宏一，児玉英二，貝戸清之，小林潔司：ロジックモデルを用いた舗装長寿命化のベンチマーキング評価，土木技術者実践論文集，土木学会，Vol.1，pp.40-52，2010.
- 森悠，藤原栄吾，貝戸清之，小林潔司，橋本拓己：相対評価モデルを用いた舗装構造の劣化診断，土木学会論文集 E1，Vol.67，No.2，pp.91-110，2011.
- Guttman, J. and Sinha, S.K.: Bayesian Inference about the Reliability Function for the Exponential Distributions, *Communications in Statistics*, Vol.A.5, 1976.
- Martz, H.F. and Waller, R.A.: *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- Sharma, K.K., Krishina, H. and Singh, B.: Bayes Estimation of the Mixture of Hazard-rate Model, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.55, pp.9-13, 1997.
- Sinha, D. and Dey, D.: Semiparametric Bayesian Analysis of Survival Data, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.92, pp.1195-1212, 1997.
- Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.
- 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.
- 伊庭幸人：計算統計学のフロンティアー計算統計 II，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.
- 津田尚胤，貝戸清之，山本浩司，小林潔司：ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法，土木学会論文集 F，Vol.62，No.3，pp.473-491，2006.
- 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67，pp.111-124，2005.
- 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集 A，Vol.63，No.2，pp.336-355，2007.
- 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D，Vol.64，No.3，pp.493-512，2008.
- 林秀和，貝戸清之，熊田一彦，小林潔司：競合的劣化ハザードモデル：舗装ひび割れ過程への適用，土木学会論文集 D，Vol.65，No.2，pp.143-162，2009.
- 小林潔司，貝戸清之，江口利幸，大井明，起塚亮輔：舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D3，Vol.67，No.4，pp.422-440，2011.
- 大里隆也，酒折文武：過分散カウントデータのベイズモデリングにおけるモデル選択基準の評価，日本計算機統計学会シンポジウム論文集，Vol.24，pp.151-154，2010.
- 久保拓弥，粕谷英一：「個体差」の統計モデルリング，日本生態学会誌，Vol.56，pp.181-190，2006.
- Ainslie, A. and Rossi, P.E.: Similarities in Choice Behavior across Product Categories, *Marketing Science*, Vol.17, pp.91-106, 1998.
- Allenby, G.M., Arora, N. and Ginter, J.L.: On the Heterogeneity of Demand, *Marketing Research*, Vol.35, pp.384-389, 1998.
- Andrews, R., Ansari, A. and Currim, I.: Hierarchical Bayes versus Finite Mixture Conjoint Analysis: a Comparison of Fit, Prediction and Partworth Recovery, *Marketing Research*, Vol.39, pp.87-98, 2002.
- Allenby, G.M. and Ginter, J.L.: Using Extremes to Design Products and Segment Markets, *Journal of Marketing Research*, Vol.32, pp.392-403, 1995.
- Fruhwirth-Schnatter, S., Tüchler, R. and Otter, T.: Bayesian Analysis of the Heterogeneity Model, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.22, No.1, pp.2-15, 2004.
- Rossi, P.E. and Allenby, G.M.: A Bayesian Approach to Estimating Household Parameters, *Journal of Marketing Research*, Vol.30, pp.171-182, 1998.

- 31) 森村英典, 高橋幸雄: マルコフ解析, 日科技連, 1979.
- 32) 阿部誠, 近藤文代: マーケティングの科学— POS データの解析—, 朝倉書店, 2005.
- 33) Geweke, J.: Evaluating the Accuracy of Sampling-based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, 1996.
- 34) Chib, S.: Marginal Likelihood from Gibbs Output, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pp.1313-1321,1995.
- 35) Newey, W.K. and West, K.D.: A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica*, Vol.55, pp.703-708, 1987.
- 36) State of New York, Department of Transportation: *Bridge Inspection Manual*, 1997.

(2012. 2. 3 受付)

HIERARCHICAL BAYESIAN ESTIMATION OF MIXED MARKOV HAZARD MODELS

Kiyoyuki KAITO, Kiyoshi KOBAYASHI, Kazuya AOKI and Kodai MATSUOKA

A variety of uncertainty affects the deterioration processes of infrastructure. Deterioration rates vary significantly according to the differences in the structural characteristics, use, and environmental conditions of infrastructure. In order to overcome the problem of overdispersion of deterioration rates caused by the heterogeneity of structures, the mixed Markov deterioration hazard model has been proposed considering the heterogeneity of deterioration rates among groups of infrastructures. In this study, it is assumed that the overdispersion of deterioration rates depend on the heterogeneity of deterioration rates among groups of infrastructure and that of respective infrastructure. Then, the mixed Markov deterioration hazard model that takes into account hierarchical heterogeneity is formulated, and a hierarchical Bayesian estimation method is proposed. Lastly, the appropriateness of the proposed method is discussed through the empirical analysis of the visual inspection data on bridge slabs.