

事業効率性評価のための 確率的劣化フロンティア分析

小林 潔司¹・貝戸 清之²・小濱 健吾³・早矢仕 廉太郎⁴・深谷 渉⁵

¹フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: kobayashi.kiyoshi.6n@kyoto-u.ac.jp

²正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

³正会員 大阪大学特任准教授 大学院工学研究科 NEXCO 西日本高速道路学共同研究講座 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-8)

E-mail: k-obama@civil.eng.osaka-u.ac.jp

⁴学生会員 大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)

E-mail: r.hayashi@civil.eng.osaka-u.ac.jp

⁵正会員 国土交通省 国土技術政策総合研究所 下水道研究部 (〒 305-0804 茨城県つくば市旭 1)

E-mail: fukatani-w86xr@nilim.go.jp

社会基盤施設の劣化速度の異質性は様々な劣化要因により発生する。本研究では、初期施工時の技術的問題に起因する劣化速度の異質性と管理上の問題で生じる異質性の双方を同時に考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルを提案する。具体的には、管理環境に起因する劣化の影響を取り除いた理想的な劣化過程をマルコフ劣化ハザードモデルを用いて記述する。また、所与の技術的条件の下でベストプラクティスとなりうる劣化過程と現状の劣化過程との乖離度合いを管理効率性パラメータを用いて表現する。その上で、確率的フロンティア分析に基づく効率性評価を通じて、施工・管理のあり方が劣化速度へ与える影響を定量的に評価する。最後に、下水道管渠に対する点検データを用いた適用事例を通じて本研究で提案する手法の有用性について考察する。

Key Words : *stochastic frontier analysis, Markov model, asset management, efficiency evaluation*

1. はじめに

点検データを用いた統計的劣化予測手法の開発によって、社会基盤施設のアセットマネジメントは飛躍的に進展してきた。なかでも、マルコフ劣化ハザードモデル¹⁾の開発は、アセットマネジメントの実用化に大きく貢献し、またその汎用性の高さから多くの拡張モデルが提案されている。特に、混合マルコフ劣化ハザードモデル²⁾は、様々な観測不可能な要因に基づく劣化速度の変動を異質性パラメータという単一の変数として表現する。管理者は自らが設定した任意の管理グループに対して、その管理グループごとに定義した異質性パラメータを比較することにより、管理グループ間の劣化速度の相対評価を実施できる。これにより、社会基盤施設の補修優先順位の決定や予算配分など、実務的な意思決定問題に対するアセットマネジメントの適用範囲が拡大された。

社会基盤施設の劣化事象には複数の要因が存在することがある。さらに複数の要因が相互に作用することによって、劣化事象を誘因する場合や、劣化速度を速める場合が確認されている。このような複雑な劣化事象に対して、観測値情報(観測可能な劣化要因)だけでは劣化過程を完全に記述できないことが少なくない。

上述したように、混合マルコフ劣化ハザードモデルで定義される異質性パラメータは、こうした観測不可能な要因を総じて1つのパラメータとして集約的に扱っている。しかし、劣化予測の結果を実際の維持管理に反映させるためには、異質性パラメータに関する理論的考察、工学的解釈や劣化要因の特定化を行っていく必要がある。とりわけ異質性パラメータには劣化の進展を抑制するような要因(施工技術の改良や維持管理体制の改善など)も含まれていることから、それらを劣化要因と分離・評価することにより、社会基盤を管理する事業体(もしくは、施設群)間における維持管理の効率性評価が可能となる。

以上の問題意識に基づいて、本研究では、初期施工時における技術的問題や施設運用後における管理のあり方が施設の劣化速度に与える影響を分析するための方法論を提案する。現実の劣化現象においては、施工・管理の不備によって劣化が進展する。また、施工・管理の不備による劣化速度の変動は、管理グループによって異なる。一方、施工・管理のあり方によって生じる劣化の影響を取り除いた理想的な劣化過程は、管理者が目指すべき最も効率的に施設を運用した場合の劣化過程である。こうしたベストプラクティスとなりうる劣化過程と現状の劣化過程との乖離度合いを管理効率

性として表現することにより、劣化過程に介在する施工・管理のあり方の影響を定量的に評価することが可能である。管理上の効率性を異質性を構成する劣化特性の1つとして捉え、技術的な異質性から分離して評価することが重要となる。本研究では、マルコフ劣化ハザードモデルと確率的フロンティア分析の考えに基づき、多様な異質性を技術的異質性と管理効率性に分離して評価する方法論を提案する。具体的には、前述したベストプラクティスとなりうる劣化過程をマルコフ劣化ハザードモデルを用いて記述する。さらに、確率的フロンティア分析に基づき、劣化速度の異質性を技術的異質性と管理効率性という2種類の異質性に分離する。以下、2.で本研究の基本的な考え方を述べる。3.で確率的劣化フロンティアモデルを定式化する。4.ではマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたモデルの推定手法を詳述する。5.で下水道管渠を対象とした実証分析を実施する。

2. 本研究の基本的考え方

(1) 従来研究概要

社会基盤施設のアセットマネジメントにおいて、目視点検データから劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化する統計的劣化予測モデルが発展している。なかでも、離散的な健全度で規定される劣化過程を記述するマルコフ劣化ハザードモデル¹⁾は汎用性が高く、これまでにマルコフ劣化ハザードモデルを基本としたモデルが数多く開発されてきた³⁾⁻⁸⁾。マルコフ劣化ハザードモデルでは、施設の劣化過程を構造・材料特性や環境条件といった観測可能な劣化要因を説明変数として考慮したハザード率によって表現する。ハザード率を用いることにより、それらの要因に基づく施設の劣化速度の相違を考慮した劣化予測が可能となる。しかし、同一の構造・材料特性、かつ使用条件の下であっても実際の劣化過程は多様に異なる。小濱等は、こうした説明変数だけでは記述できない観測不可能な要因に基づく劣化速度の変動を確率変数によって表現した混合マルコフ劣化ハザードモデルを開発した²⁾。混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、劣化速度を表す混合ハザード率が異質性パラメータと健全度別標準ハザード率を用いて

混合ハザード率

= 異質性パラメータ × 健全度別標準ハザード率 (1)

と表現される。すなわち、混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、対象とするサンプルの平均的な劣化ハザード率を標準ハザード率を用いて定義するとともに、個別サンプルのハザード率の異質性を、標準ハザード率からの乖離の程度を表す異質性パラメータを用いて表

現することにより、対象とするサンプルの劣化速度の多寡を相対評価することを可能とする。混合マルコフ劣化ハザードモデルの開発により、特定の管理グループごとの劣化要因の分析を通じて、対象施設に対する補修優先順位の決定や予算配分といった施策の意思決定を体系的に実施することが可能となった^{9),10)}。一方で、青木等は混合マルコフ劣化ハザードモデルの実務へ適用した際の課題として、異質性要因の特定の必要性を指摘している⁹⁾。今後のアセットマネジメントを考えると、異質性評価によって劣化速度が相対的に速い施設を抽出するだけでなく、それらの施設に対して効果的な対策を施すために劣化速度が速い要因を詳細に分析する必要がある。異質性に含まれる特定すべき要因の1つに施工・管理のあり方によって変動する要因があげられる。具体的には、施工時の初期不良や維持管理の不備に起因する早期劣化がある。早期劣化は次回施工における技術改良や維持管理体制の改善により劣化の進展を抑制することが可能である。したがって、施工・管理のあり方に起因する劣化速度の変動を特定することにより、具体的な施策の立案・実施を通じて施工・管理の効率化を図ることが可能となる。

一方、計量経済学の分野では、事業運営の効率化を目的として生産フロンティアや費用フロンティアの効率性を評価するための分析手法が多く提案されている。実際のデータから効率性を評価する代表的な手法として、データ包絡分析¹¹⁾ (Data Envelopment Analysis) や確率的フロンティア分析^{12),13)} (Stochastic Frontier Analysis) があげられる。いずれの分析手法においても、最も効率的な状態であるフロンティア (ベストプラクティス) を求めた上で、そこからの乖離をもって現在の状態における効率性を評価している。なかでも、確率的フロンティア分析は効率性に対して特定の確率分布を仮定することによって統計的な誤差と効率性の分離推定を可能とした。確率的フロンティア分析は、計量経済学の分野だけでなく土木分野においても、小林等が下水道システムの費用効率性の評価に用いる¹⁴⁾ など多分野で数多くの適用実績を有しており、既に方法論が体系化されている^{12),13)}。しかしながら、社会基盤施設の劣化事象に対してこれらの方法論を応用した事例は筆者の知る限り存在しない。

本研究では、マルコフ劣化ハザードモデルと確率的フロンティア分析に基づき、劣化過程に介在する効率性を分析する方法論を提案する。まず、初期施工時における技術的条件を与件として、施設運用後に十分な管理がなされているような理想的な劣化過程を初期的な技術的条件を与件とした条件付きフロンティアとして設定する。次に、所与の技術的条件の下で管理上のベストプラクティスとなりうる最も効率的な劣化過程と

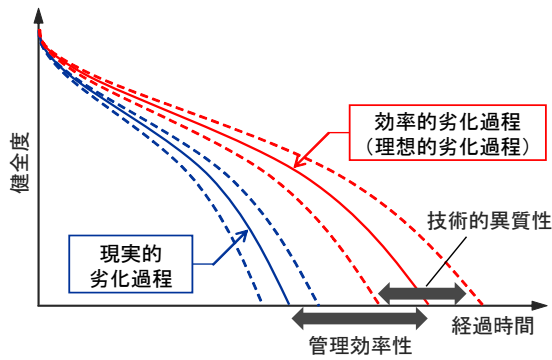


図-1 異なる特性による劣化速度の変動

現実の劣化過程との乖離を事業運用上の効率性として表現する。さらに、初期施工時の技術的条件による劣化速度の技術的異質性に着目する。すなわち、式(1)に示す混合ハザード率が劣化速度の総合的な異質性を表現するのに対して、本研究で提案する確率的フロンティアモデルは劣化速度の異質性を1)初期施工時における技術的異質性と、2)施設運用後の管理上の効率性に分解することを目的とする。

(2) 管理グループ単位の異なる劣化特性

異なる事業者が管理する同種の社会基盤施設の早期劣化の程度を相対評価する問題を考える。あるいは、ある事業者が管理する複数の施設グループの劣化比較を行う場合を想定することもできる。本研究では、このように劣化速度の相対比較を行う施設群を管理グループと呼ぶ。管理グループごとに、施設が置かれている環境や施工時に採用した技術の内容や施工状態により劣化特性は異なる。管理グループの中には初期時点における施工条件やその品質、維持管理の状況等のさまざまな要因により、管理している施設群が本来あるべき耐久性を維持できず早期劣化が進行しているような管理グループが存在する。一方、初期時点の技術的な条件が同一の2つの施設群を考える。1つの施設群は、施設の供用開始後において理想的な管理環境に置かれていると仮定する。いま1つの施設群は、必ずしも十分ではない(以下、現実的な)管理環境に置かれたと仮定する。現実的な劣化過程と理想的な劣化過程は、図-1の実線で示すパフォーマンス曲線によって表現される。当然のことながら、現実的な劣化過程を表すパフォーマンス曲線よりも理想的な劣化過程を表すパフォーマンス曲線の方が劣化速度は遅くなる。このように必ずしも十分ではない管理環境に起因する早期劣化の影響は、理想的な劣化過程を表すパフォーマンス曲線からの乖離度合いで評価することができる。現実の劣化過

程を表す青線のパフォーマンス曲線が理想的な劣化過程を表す赤線のパフォーマンス曲線に近いほど、施設の運用において効率的であると評価できる。このような早期劣化に起因して生じる施設の劣化過程の変動を、本研究では事業運営に関わる「管理効率性」と呼ぶ。以後、十分な管理環境の下で実現するような劣化過程を「効率的劣化過程」と呼ぶ。管理効率性は今後のアセットマネジメントのあり方の改善によって早期劣化の原因を抑制することが可能である。一方、異質性の中には、初期時点における設計施工条件や施設の技術的な条件により、維持管理の条件によって抑制できないような劣化の要因が存在する。このような管理グループが固有に有する要因に基づく劣化速度の変動を、本研究では、劣化特性に介在する「技術的異質性」と呼ぶ。本研究では、管理効率性と技術的異質性という2つの異なる評価尺度を用いて管理グループごとの劣化特性を相対評価する問題を考える。

(3) 異質性の分離評価

本研究では、確率的フロンティア分析に基づき、施設の劣化過程に介在するハザード率の管理効率性と技術的異質性の分離評価を試みる。それぞれの劣化特性を表すパラメータの詳細については3.(3)で議論することとし、ここでは、それぞれの劣化特性を確率変数 ε_u 、 ε_v を用いて表現する。いま、それぞれの劣化特性による劣化速度の変動を確認するためにどちらか一方の劣化特性を固定して議論を進める。図-2の左上には、技術的異質性を固定した場合の管理効率性による各管理グループの劣化速度の変動を表している。同図の黒線で描かれたパフォーマンス曲線は、早期劣化の影響を取り除いた施設の効率的な劣化過程を表す。管理効率性は $\varepsilon_u = 1$ を下限值として、1から離れるにつれ非効率的であり劣化速度が速くなることを表す。言い換えれば、1に近いほど効率的であるといえる。ここで、 $\varepsilon_u = 1$ となる施設の効率的な劣化過程を表すパフォーマンス曲線を「効率的パフォーマンス曲線」と呼ぶ。一方、図-2の右上のように管理効率性の変動を固定した場合の技術的異質性に基づく劣化速度の変動は、管理効率性によるそれと異なる挙動を示す。ここで、 $\varepsilon_v = 1$ となる施設の平均的な劣化過程を表すパフォーマンス曲線を「平均的なパフォーマンス曲線」と呼ぶ。技術的異質性における劣化速度の変動は、 $\varepsilon_v = 1$ からの大小によって決定される。すなわち、 $\varepsilon_v > 1$ の場合、平均的な劣化過程よりも劣化速度が速く、 $\varepsilon_v < 1$ の場合、劣化速度が遅いと評価することができる。このように、それぞれの劣化特性によって施設の劣化速度が異なる変動を示すことが見てとれる。しかし、実際の異質性は管理効率性と技術的異質性の双方の劣化特性が混合さ

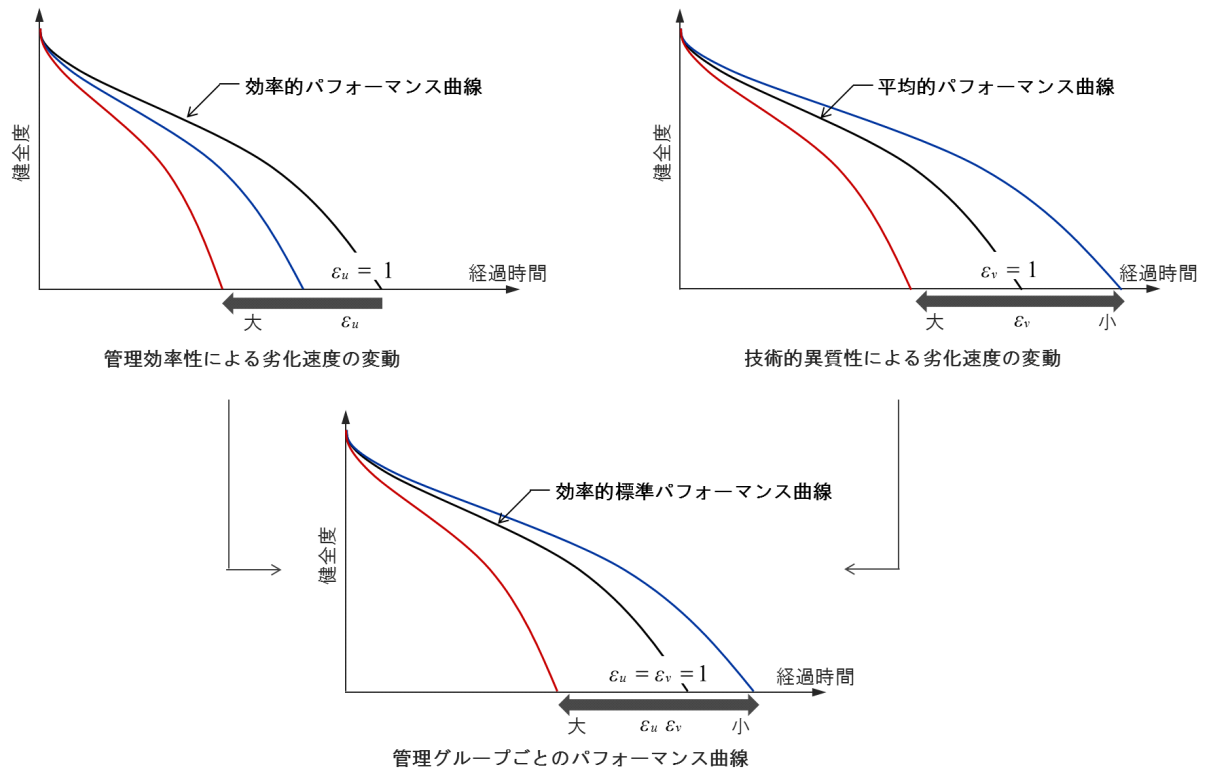


図-2 効率的パフォーマンス曲線

れたかたちで表現される．そこで，施設の劣化速度を表すハザード率 λ を

$$\lambda = \tilde{\lambda} \varepsilon_u \varepsilon_v \quad (2)$$

と表す．ただし， $\tilde{\lambda}$ はそれぞれのパラメータが 1 である場合の平均的かつ効率的な劣化過程を表すハザード率である（以下，効率的標準ハザード率）．効率的標準ハザード率によって表現されるパフォーマンス曲線を「効率的標準パフォーマンス曲線」と呼ぶ（図-2 下参照）．すなわち，施設の劣化速度の異質性が管理効率性と技術的異質性を表すパラメータの積 $\varepsilon_u \varepsilon_v$ によって表現される．したがって，異質性の分離評価を行うためには，施設の劣化過程からそれぞれの劣化特性を示すパラメータ ε_u , ε_v を識別する必要がある．確率的フロンティア分析では，管理効率性と確率的誤差を表すパラメータに対して，互いに識別可能な異なる確率分布を仮定することにより，両者を分離して推定することを可能とした¹³⁾．具体的に，管理効率性を表現するパラメータについては，対数変換された管理効率性のパラメータ $\log(\varepsilon_u)$ に対して，正規分布に対して負の領域を切除して再定義された確率分布（非負切断正規分布）や指数分布を代表とする片袖の分布を仮定することによって変動の特性を捉えることができる．一方，本研究では技術的異質性として定義した確率的誤差を表すパラメータについては，対数変換された技術的異質性

のパラメータ $\log(\varepsilon_v)$ に対して，正規分布を用いて表現できる¹³⁾．本研究では，確率的フロンティア分析の考えに基づき，管理効率性に対しては指数分布を，技術的異質性に対しては正規分布を用いて表現することにより，それぞれの劣化特性の分離評価を実施する．

3. 確率的劣化フロンティア分析

(1) モデル化の前提条件

カレンダー時刻 s_0 を初期時点とする離散的時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots$ を考え，離散的時間軸上の点を時点と呼びカレンダー時刻と区別する．単位時間幅を 1 に基準化する．施設の健全度を I 個のレーティング $i (i = 1, \dots, I)$ によって表現する． i の値は大きくなるほど劣化が進展していることを示す．時点 t における施設の健全度を状態変数 $h(t) = i (i = 1, \dots, I; t = 0, 1, \dots)$ を用いて表現する．ここで， I は吸収状態である．施設の劣化過程がマルコフ連鎖に従うと仮定し，離散時間軸上の単位時間間隔における健全度間の推移確率をマルコフ推移確率を用いて表現する．マルコフ推移確率は，時点 t における定期点検において観測された健全度 $h(t) = i$ を与件とし，次の時点 $t+1$ における健全度 $h(t+1) = j (j \geq i)$ が生起する条件付き確率

$$\text{Prob}[h(t+1) = j | h(t) = i] = \pi_{ij} \quad (3)$$

を用いて定義される. このような推移確率を全ての健全度ペア (i, j) に対して定義することにより, マルコフ推移確率行列

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を定義することができる. マルコフ推移確率 (3) は所与の2つの時点 $t, t+1$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものである. 対象とする点検間隔が異なれば推移確率の値は異なる. 補修がない限り常に劣化が進行するため, $\pi_{ij} = 0 (i > j)$ が成立する. また, 推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$ が成立する. すなわち, マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} = 0 \quad (i > j \text{ の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1 \end{array} \right\} \quad (5)$$

が成立しなければならない. 状態 I は補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり, $\pi_{II} = 1$ が成立する. なお, マルコフ推移確率は過去の状態履歴には依存しない. マルコフ推移確率モデルでは, 健全度が $i-1$ から i に推移した時点に関わらず, 時点 t から時点 $t+1$ の間に推移する確率は時点 t における健全度のみに依存するという性質 (マルコフ性) を満足する.

(2) マルコフ劣化ハザードモデル

マルコフ推移確率はマルコフ劣化ハザードモデルを用いて推定できる. 本研究では津田等¹⁾が開発したマルコフ劣化ハザードモデルを用いるが, 読者の便宜を図るためモデルの概要を説明しておく. いま, 健全度 $i (i = 1, \dots, I-1)$ の寿命を確率変数 ζ_i で表す. 健全度 i の寿命が確率密度関数 $f_i(\zeta_i)$, 分布関数 $F_i(\zeta_i)$ に従うと仮定する. ここで, 健全度が変化した時刻 $\tau_i (i = 0, \dots, I-2)$ を起点とする時間軸 (以下, サンプル時間軸と呼ぶ) を考える. 健全度 i のサンプル時間軸上で, カレンダー時刻 τ_{i-1} からの経過時間を y_i と表記する. 定義より時刻 τ_{i-1} では $y_i = 0$ となる. ここで, 時刻 τ_{i-1} に健全度が i となりそこから時間 y_i が経過した時刻において健全度が $i+1$ に変化する確率密度をハザード率 $\lambda_i(y_i)$ を用いて表現する^{15), 16)}. ハザード率は, 健全度が i となった時刻から時間 y_i が過ぎる間健全度が i のまま継続する生存確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて

$$\lambda_i(y_i)\Delta y_i = \frac{f_i(y_i)\Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (6)$$

と表せる. すなわち, ハザード率 $\lambda_i(y_i)$ は, 初期時刻 $\tau_{i-1} (y_i = 0)$ から時間 y_i が経過するまで健全度 i の状態が継続したという条件のもとで期間 $[y_i, y_i + \Delta y_i)$ 中に健全度 $i+1$ に進展する条件付き確率である. ハザー

ド率が経過時間 y_i に依存せず常に一定値 $\lambda_i > 0 (i = 1, \dots, I-1)$ をとる場合, 指数ハザード率

$$\lambda_i(y_i) = \lambda_i \quad (7)$$

が成立する. 指数ハザード率を用いることにより, 劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる. さらに, 指数ハザード率を用いれば, 健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i)$ は

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\lambda_i y_i) \quad (8)$$

と表現できる.

さらに, カレンダー時刻 τ_A の点検の結果, 健全度が i と判断されたとする. そのうち, 時刻 τ_A から追加的に期間 $z (\geq 0)$ 以上に亘って健全度 i が継続する確率 $\bar{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A)$ は,

$$\begin{aligned} \bar{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A) &= \text{Prob}\{\zeta_i \geq \tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A\} \\ &= \frac{\exp\{-\lambda_i(\tau_A + z)\}}{\exp(-\lambda_i\tau_A)} = \exp(-\lambda_i z) \end{aligned} \quad (9)$$

と表される. すなわち, 点検時刻 τ_A において健全度が i と判定され, 次の点検時刻 $\tau_B = \tau_A + z$ においても健全度が i と判定される確率は,

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i] = \exp(-\lambda_i z) \quad (10)$$

となる. ただし, z は2つの点検時刻の間隔を表す. 確率 $\text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i]$ はマルコフ推移確率 $\pi_{ii}(z)$ にほかならない. 指数ハザードを用いた場合, 推移確率 $\pi_{ii}(z)$ はハザード関数 λ_i と点検間隔 z のみに依存し, 時刻 τ_A, τ_B に関する情報を用いることなく推移確率を推定することが可能となる. 以上の議論を拡張し, 指数ハザード関数を用いて, 点検時刻 τ_A と $\tau_B = \tau_A + z$ の間で健全度が i から $j (> i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z) (i = 1, \dots, I-1, j = 1, \dots, I)$ は,

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z) &= \text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] \\ &= \sum_{s=i}^j \prod_{m=i}^{s-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_s} \prod_{m=s}^{j-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1} - \lambda_s} \exp(-\lambda_s z) \end{aligned} \quad (11)$$

と表すことができる¹⁾. ただし, 表記上の規則として

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{m=i}^{s-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_s} = 1 \quad (s = i \text{ のとき}) \\ \prod_{m=s}^{j-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1} - \lambda_s} = 1 \quad (s = j \text{ のとき}) \end{array} \right. \quad (12)$$

が成立すると考える. さらに, 表記の便宜上

$$\begin{aligned} &\prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_s} \exp(-\lambda_s z) \\ &= \prod_{m=i}^{s-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_s} \prod_{m=s}^{j-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1} - \lambda_s} \exp(-\lambda_s z) \end{aligned} \quad (13)$$

と簡略化する. また, π_{II} に関してはマルコフ推移確率の条件より次式で表せる.

$$\pi_{II} = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z) (i = 1, \dots, I-1) \quad (14)$$

なお、マルコフ劣化ハザードモデルを用いれば、アセットマネジメントのためのリスク管理指標を導出できる。すなわち、当該健全度にはじめて到達した時点から劣化が進展して次の健全度に進むまでの期待期間長（以下、期待寿命と呼ぶ）は、生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ を用いて

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \tilde{F}_i(y_i) dy_i \quad (15)$$

と表される¹⁵⁾。ここで、指数ハザード関数を用いた生存関数 $\tilde{F}_i(y_i)$ が式(8)で表されることに留意すれば、期待寿命は次式で表される。

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_i y_i) dy_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad (16)$$

式(16)を用いることにより、初期時点からの経過年数と社会基盤施設の平均的な健全度との対応関係を求めることができる。

(3) 確率的劣化フロンティアモデル

施設の点検データに基づいて K 個の管理グループの管理効率性を評価する問題を考える。本研究では、合計 L_k 個の施設で構成される管理グループ $k(k = 1, \dots, K)$ の管理効率性が、各グループが有する施設のハザード率に存在すると仮定し、ハザード率 λ_i^{lk} ($l_k = 1, \dots, L_k$; $k = 1, \dots, K$; $i = 1, \dots, I-1$) の管理効率性を評価する問題を考える。現実の施設の劣化過程は初期時点における施工条件やその品質、維持管理の状況等のさまざまな要因により、通常劣化状態より早く劣化するという早期劣化の問題が存在する。また、対象とする施設に初期施工上の問題がなく入念な維持管理が実施されているような状況に置かれていても劣化現象が発現する。このように十分に管理された状況の下で発現する効率的劣化過程を表現するハザード率を効率的ハザード率と呼ぶ。いま、健全度 i における施設 l_k の効率的ハザード率を

$$\tilde{\lambda}_i^{lk} = \exp(\beta_i \mathbf{x}^{lk'}) \quad (17)$$

と表現する。 $\beta_i = (\beta_i^1, \dots, \beta_i^M)$ はパラメータベクトル $\mathbf{x}^{lk} = (x_1^{lk}, \dots, x_M^{lk})$ は属性ベクトル、記号 $'$ は転置操作を表す。しかし、現実の劣化過程は構造特性や環境条件だけでは記述できない施設固有の要因が介在するため、真の効率的ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ が効率的ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ に一致する保証はない。こうしたベストプラクティスの不確実性を表現するために、観測できない要因による真の効率的ハザード率の効率的標準ハザード率からの乖離を表す誤差項 $\exp(v_k)$ を導入し、真の効率的ハザード率を

$$\tilde{\lambda}_i^{lk} = \tilde{\lambda}_i^{lk} \exp(v_k) \quad (18)$$

と表現する。以降、 v_k を技術的異質性パラメータと呼ぶ。ここで、技術的異質性パラメータ v_k が正規分布の

確率密度関数 $f(v_k)$

$$f(v_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{v_k^2}{2\sigma^2}\right) \quad (19)$$

から抽出された確率標本であると考え。正規分布 $f(v_k)$ は平均 0、分散 σ^2 である。さらに、現実の劣化現象には維持管理上の不具合により早期劣化が介在する。早期劣化が発生する場合、現実の劣化過程を表すハザード率 λ_i^{lk} と真の効率的ハザード率の間には

$$\lambda_i^{lk} \geq \tilde{\lambda}_i^{lk} = \tilde{\lambda}_i^{lk} \exp(v_k) \quad (20)$$

が成立する。このように現実のハザード率が真の効率的ハザード率から乖離する程度を管理効率性を表す確率的変動項 $\exp(u_k) \geq 1$ を用いて表す。すなわち、

$$\begin{aligned} \lambda_i^{lk} &= \tilde{\lambda}_i^{lk} \exp(u_k) \\ &= \tilde{\lambda}_i^{lk} \exp(v_k + u_k) \end{aligned} \quad (21)$$

が成立する。以降、 u_k を管理効率性パラメータと呼ぶ。このように劣化ハザード率 λ_i^{lk} は効率的標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ と管理グループ k に関する技術的異質性を表す確率的誤差項 $\exp(v_k)$ と管理効率性を表す確率的変動項 $\exp(u_k)$ を用いて表現される。以降、式(21)を確率的劣化フロンティアモデルと呼ぶ。定義より $\exp(u_k) \geq 1$ が成立する。管理効率性パラメータ u_k は平均 η 、分散 η^2 の指数分布

$$f(u_k) = \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{u_k}{\eta}\right) \quad (22)$$

から抽出された確率標本であると考え。

ここで、任意の管理グループ k に着目し、パラメータ v_k, u_k をそれぞれ \bar{v}_k, \bar{u}_k に固定する。このとき、管理グループ k のある施設 l_k の健全度 i の寿命が y_i^{lk} 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i^{lk})$ は、式(21)を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^{lk}) = \exp\left\{-\tilde{\lambda}_i^{lk} \exp(\bar{v}_k + \bar{u}_k) y_i^{lk}\right\} \quad (23)$$

と書き換えることができる。さらに、施設 l_k の第 1 回目の点検時刻 τ_A^{lk} において健全度が i と判定され、次の点検時刻 $\tau_B^{lk} = \tau_A^{lk} + z^{lk}$ においても健全度が i と判定される確率 $\pi_{ii}(z^{lk} | \bar{v}_k, \bar{u}_k)$ は、

$$\pi_{ii}(z^{lk} | \bar{v}_k, \bar{u}_k) = \exp\left\{-\tilde{\lambda}_i^{lk} \exp(\bar{v}_k + \bar{u}_k) z^{lk}\right\} \quad (24)$$

となる。また、点検時刻 τ_A^{lk} と $\tau_B^{lk} = \tau_A^{lk} + z^{lk}$ の間で健全度が i から $j (> i)$ に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}(z^{lk} | \bar{v}_k, \bar{u}_k)$ は、式(21)より

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z^{lk} | \bar{v}_k, \bar{u}_k) &= \sum_{s=i}^j \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{lk}}{\tilde{\lambda}_m^{lk} - \tilde{\lambda}_s^{lk}} \exp\left\{-\tilde{\lambda}_s^{lk} \exp(\bar{v}_k + \bar{u}_k) z^{lk}\right\} \\ &= \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{lk}) \exp\left\{-\tilde{\lambda}_s^{lk} \exp(\bar{v}_k + \bar{u}_k) z^{lk}\right\} \end{aligned} \quad (25)$$

($i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I; k = 1, \dots, K$)

と表すことができる¹⁾. ただし, $\tilde{\lambda}^{l_k} = (\tilde{\lambda}_1^{l_k}, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k})$ である. また, $\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k})$ は

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) = \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{l_k}}{\tilde{\lambda}_m^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \quad (26)$$

となり効率的標準ハザード率のみの関数で表される. また, $\pi_{iI}(z^{l_k} | \bar{v}_k, \bar{u}_k)$ に関しては

$$\pi_{iI}(z^{l_k} | \bar{v}_k, \bar{u}_k) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z^{l_k} | \bar{v}_k, \bar{u}_k) \quad (27)$$

と表すことができる. また, 式(16)と同様に式(23)を用いることにより, 施設の期待寿命が次式で表現できる.

$$\begin{aligned} RMD_i^{l_k} &= \int_0^\infty \exp\left\{-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \exp(\bar{v}_k + \bar{u}_k) y_i^{l_k}\right\} dy_i^{l_k} \\ &= \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^{l_k} \exp(\bar{v}_k + \bar{u}_k)} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)を用いることにより, 施設の現実的な劣化過程をパフォーマンス曲線として表現することができる. 式(28)によって描くことができるパフォーマンス曲線を「現実的パフォーマンス曲線」と呼ぶ. また, 早期劣化の影響を取り除いた効率的な劣化過程を表す場合の期待寿命は

$$\begin{aligned} \overline{RMD}_i^{l_k} &= \int_0^\infty \exp\left(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} y_i^{l_k}\right) dy_i^{l_k} \\ &= \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^{l_k}} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^{l_k} \exp(\bar{v}_k)} \end{aligned} \quad (29)$$

によって表される. 式(29)によって描くことができるパフォーマンス曲線は「効率的パフォーマンス曲線」である. したがって, 式(29)において, $\exp(\bar{v}_k) = 1$ の場合に示される曲線は, 「効率的標準パフォーマンス曲線」となる.

(4) 点検データと尤度関数

対象とする施設 $l_k (l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K)$ に関して2回の点検が実施されたと考える. 点検が実施されたカレンダー時刻を $(\tau_A^{l_k}, \tau_B^{l_k})$ と表す. ただし, $\tau_A^{l_k}$ は第1回の点検時刻であり $\tau_B^{l_k}$ は第2回目の点検が実施されたカレンダー時刻である. 施設 l_k の点検サンプルには第1回目の点検から第2回目の点検が実施された時刻までの期間長 z^{l_k} と, これら2回の点検で観測された施設の健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k}), \bar{h}(\tau_B^{l_k})$ に関する情報が記載されている. 記号「 $\bar{\cdot}$ 」は実測値であることを意味している. 点検時点における健全度に基づいて, ダミー変数 $\delta_{ij}^{l_k} (i = 1, \dots, I-1, j = i, \dots, I; l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K)$ を

$$\delta_{ij}^{l_k} = \begin{cases} 1 & \bar{h}(\tau_A^{l_k}) = i, \bar{h}(\tau_B^{l_k}) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (30)$$

と定義する. さらに, ダミー変数ベクトルを $\delta^{l_k} = (\delta_{11}^{l_k}, \dots, \delta_{I-1, I}^{l_k})$, 施設の劣化速度に影響を及ぼす施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトルを $\bar{x}^{l_k} =$

$(\bar{x}_1^{l_k}, \dots, \bar{x}_M^{l_k})$ と表す. ただし, $\bar{x}_m^{l_k} (m = 1, \dots, M)$ は施設 l_k の点検サンプルの m 番目の説明変数に関する期間 $[\tau_A^{l_k}, \tau_B^{l_k})$ における観測値を表す. また, 第1番目の説明変数は定数項に該当する変数であり恒等的に $x_1^{l_k} = 1$ である. 施設 l_k の点検サンプルが有する情報を $\xi^{l_k} = (\delta^{l_k}, z^{l_k}, \bar{x}^{l_k})$ と表す. また, 点検データ全体を Ξ と表す.

一方, 式(17)に示すように施設 l_k の効率的ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k} (i = 1, \dots, I-1; l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K)$ は施設の特性ベクトルに依存する. また, マルコフ推移確率は式(24), (25)で示したように技術的異質性パラメータ $v_k (k = 1, \dots, K)$ と管理効率性パラメータ $u_k (k = 1, \dots, K)$ を用いて表現できる. 管理グループ k に関するパラメータ v_k と u_k が互いに独立であるとすれば, v_k と u_k の同時確率密度関数 $g^*(v_k, u_k)$ は

$$g^*(v_k, u_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\eta} \exp\left\{\frac{-v_k^2}{2(\sigma)^2} - \frac{u_k}{\eta}\right\} \quad (31)$$

と表される. ここで, $\omega_k = v_k + u_k$ を定義すれば, u_k と ω_k の同時確率密度関数 $g(u_k, \omega_k)$ は

$$g(u_k, \omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\eta} \exp\left\{\frac{-u_k}{\eta} - \frac{(\omega_k - u_k)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (32)$$

と表される. したがって, ω_k の周辺確率密度関数は

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega_k) &= \int_0^\infty g(u_k, \omega_k) du_k \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\eta} \exp\left\{\frac{-u_k}{\eta} - \frac{(\omega_k - u_k)^2}{2\sigma^2}\right\} du_k \\ &= \frac{1}{\eta} \Phi\left(\frac{\omega_k}{\sigma} - \frac{\sigma}{\eta}\right) \exp\left(-\frac{\omega_k}{\eta} + \frac{\sigma^2}{2\eta^2}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

と表される. ただし, $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数を表す. $\hat{f}(\omega_k)$ は平均, 分散

$$E(\omega_k) = \eta \quad (34a)$$

$$\text{Var}(\omega_k) = \eta^2 + \sigma^2 \quad (34b)$$

を持つ非対称的確率密度関数である¹⁷⁾. ただし, パラメータ ω_k は管理グループ k に特有な劣化速度の異質性を表す. 以下, ω_k を管理グループ k に関する異質性パラメータと呼ぶ. ここで, 確率的劣化フロンティアモデル(21)において, $\omega_k = v_k + u_k$ で表せることに着目し, 全点検サンプルから観察できる尤度をマルコフ推移確率と異質性パラメータ ω_k の同時確率密度関数を用

いて

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi}) &= \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \mathcal{L}(\beta, \sigma, \eta | \bar{\xi}^{l_k}) \\
 &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \pi_{ij}(\bar{x}^{l_k}, \bar{z}^{l_k} | \beta_i, \omega_k) \hat{f}(\omega_k) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \\
 &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) \right. \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ -\tilde{\lambda}_s^{l_k} \exp(\omega_k) z^{l_k} \right\} \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1}{\eta} \Phi \left(\frac{\omega_k}{\sigma} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \exp \left(-\frac{\omega_k}{\eta} + \frac{\sigma^2}{2\eta^2} \right) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \quad (35)
 \end{aligned}$$

と表す. ここで, θ は未知パラメータベクトル $\theta = (\beta, \sigma, \eta)$ を表しており $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{I-1})$ である.

4. モデルの推定法

(1) ベイズ推定の概要

一般的な確率的フロンティアモデルの場合, 最尤推定法を用いてパラメータの推定を行うことができる. 具体的には, 技術的異質性を表すパラメータと管理効率性を表すパラメータが特定の確率分布に従うと仮定した上で, 技術的異質性と管理効率性に関するパラメータの和で表される残差を推定する. その後, 残差を再度技術的異質性パラメータ v_k と管理効率性パラメータ u_k に分解する. 一方, ハザードモデルの推定においては, 近年のマルコフ連鎖モンテカルロ法^{18),19)} (以下, MCMC法)により効率的なベイズ推定が可能となっている^{20),21)}. さらに, 貝戸等は異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルに対して, 階層ベイズ推定手法を適用することにより, 全ての未知パラメータを同時に推定する手法を開発した²²⁾. 本研究で提案した確率的劣化フロンティアモデルは, マルコフ劣化ハザードモデルに異質性を導入したモデルであり, 高次の非線形性により最尤推定法を用いたパラメータ推定が困難である. したがって, 本研究ではマルコフ連鎖モンテカルロ法¹⁸⁾ (以下, MCMC法)を利用して確率的劣化フロンティアモデルのベイズ推定を試みる.

いま, 未知パラメータベクトル θ が確率変数で事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ に従うと仮定する. 観測値データ $\bar{\Xi}$ が与件であるときに, 未知パラメータベクトル θ の同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\Xi})$ は, ベイズの定理より

$$\pi(\theta|\bar{\Xi}) = \frac{\mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})\pi(\theta)d\theta} \quad (36)$$

と表すことができる. ただし, Θ はパラメータ空間である. このとき, 式(36)の分母は基準化定数であることから同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\Xi})$ は

$$\pi(\theta|\bar{\Xi}) \propto \mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})\pi(\theta) \quad (37)$$

となり, 事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ と尤度関数 $\mathcal{L}(\theta|\bar{\Xi})$ により表すことができる.

(2) 事後分布の定式化

式(35)に示す尤度関数は高次の非線形性を有しており, 同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\Xi})$ に対して共役な事前確率密度関数を持たない. そこで, 事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ を

$$\begin{aligned}
 \pi(\theta) &= \pi(\beta, \sigma, \eta) = \pi(\beta)\pi(\sigma)\pi(\eta) \\
 &= \prod_{i=1}^{I-1} \pi(\beta_i)\pi(\sigma)\pi(\eta) \quad (38)
 \end{aligned}$$

と展開し, 式(38)の未知パラメータベクトル θ の事前確率密度関数をそれぞれ以下のように設定する. まず, β_i の事前確率密度関数 $\pi(\beta_i)$ として多次元正規分布を用いる. すなわち, $\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ である. ただし, $\mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ は期待値ベクトルを μ_i , 分散共分散行列を Σ_i とした M 次元正規分布である. また, σ, η の事前確率密度関数 $\pi(\sigma), \pi(\eta)$ としてそれぞれガンマ分布を設定する. すなわち, $\sigma \sim \mathcal{G}(\alpha_0^\sigma, \gamma_0^\sigma)$, $\eta \sim \mathcal{G}(\alpha_0^\eta, \gamma_0^\eta)$ である. なお, 添え字 0 はハイパーパラメータを表す. 同時事後確率密度関数は式(37)に式(35), 式(38)を代入することにより,

$$\begin{aligned}
 \pi(\theta|\bar{\Xi}) &\propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \pi_{ij}(\bar{x}^{l_k}, \bar{z}^{l_k} | \beta_i, \omega_k) \hat{f}(\omega_k) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \\
 &\quad \cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\beta_i - \mu_i)\Sigma_i^{-1}(\beta_i - \mu_i)' \right\} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{(\gamma_0^\sigma)^{\alpha_0^\sigma} \Gamma(\alpha_0^\sigma)} (\sigma)^{\alpha_0^\sigma - 1} \exp \left(-\frac{\sigma}{\gamma_0^\sigma} \right) \\
 &\quad \cdot \frac{1}{(\gamma_0^\eta)^{\alpha_0^\eta} \Gamma(\alpha_0^\eta)} (\eta)^{\alpha_0^\eta - 1} \exp \left(-\frac{\eta}{\gamma_0^\eta} \right) \quad (39)
 \end{aligned}$$

と表すことができる.

(3) 同時事後確率密度関数の推定

確率的劣化フロンティアモデルの同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\bar{\Xi})$ を求めるために, 条件付き事後確率密度関数を利用するギブスサンプリング¹⁸⁾がある. ここでは, ギブスサンプリングの考え方に基づき, 未知パラメータベクトル θ を各未知パラメータ β, σ, η に分け, 他のパラメータ値を既知とした条件付き事後確率密度関数を用いて式(39)を算出する. 潜在変数である異質性パラメータベクトル ω についても同様の手法によって算出する. なお, ギブスサンプリングを行うためには, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングができる必要がある. しかし, 確率的劣化フロンティアモデルにおいては, 各パラメータの条件付き事後確率密度関数から直接サンプリングすること

が困難であるため、メトロポリス・ヘイスティング法(以下、MH法)を用いて各パラメータの条件付き事後確率密度関数からサンプリングを行う。

確率的劣化フロンティアモデルの各パラメータの条件付き事後確率密度関数を利用して同時事後確率密度関数を算出する。未知パラメータの部分ベクトル β から β_{e_1} ($e_1 = 1, \dots, I-1$) を除いた未知パラメータベクトルを β^{-e_1} と表す。また、潜在変数の部分ベクトル ω から ω^{e_2} ($e_2 = 1, \dots, K$) を除いた潜在変数ベクトルを ω^{-e_2} と表す。式(39)より、 β^{-e_1} , σ , η , ω を既知とした時の β_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \sigma, \eta, \omega, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \sigma, \eta, \omega, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^{e_1} \prod_{j=e_1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \tilde{\lambda}_{e_1}^{l_k} \delta_{ij}^{l_k} - \delta_{ie_1}^{l_k} \sum_{s=i}^j \prod_{m=i}^{s-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_m^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \right. \\ & \quad \left. \prod_{m=s}^{j-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{m+1}^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \exp \left\{ -\tilde{\lambda}_s^{l_k} \exp(\omega_k) z^{l_k} \right\} \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \\ & \quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta_{e_1} - \mu_{e_1}) \Sigma_{e_1}^{-1} (\beta_{e_1} - \mu_{e_1})' \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $\delta_{ie_1}^{l_k}$ は点検サンプル l_k の事前健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k}) = i$ とサンプリングする際の事前健全度 e_1 が一致した場合に1を、そうでない場合に0をとるダミー変数である。また、 β , η , ω を既知とした時の σ の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\sigma | \beta, \eta, \omega, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \pi(\sigma | \beta, \eta, \omega, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{\eta} \Phi \left(\frac{\omega_k}{\sigma} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \exp \left(-\frac{\omega_k}{\eta} + \frac{\sigma^2}{2\eta^2} \right) \right\}^{L_k} \\ & \quad \cdot (\sigma)^{\alpha_\sigma - 1} \exp \left(-\frac{\sigma}{\gamma_\sigma} \right) \quad (41) \end{aligned}$$

と表せる。同様に β , σ , ω を既知とした時の η の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\eta | \beta, \sigma, \omega, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \pi(\eta | \beta, \sigma, \omega, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{\eta} \Phi \left(\frac{\omega_k}{\sigma} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \exp \left(-\frac{\omega_k}{\eta} + \frac{\sigma^2}{2\eta^2} \right) \right\}^{L_k} \\ & \quad \cdot (\eta)^{\alpha_\eta - 1} \exp \left(-\frac{\eta}{\gamma_\eta} \right) \quad (42) \end{aligned}$$

と表せる。さらに、 β , σ , η , ω^{-e_2} を既知とした時の ω^{e_2} の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\omega^{e_2} | \beta, \sigma, \eta, \omega^{-e_2}, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} & \pi(\omega^{e_2} | \beta, \sigma, \eta, \omega^{-e_2}, \Xi) \propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{l_{e_2}=1}^{L_{e_2}} \\ & \quad \left\{ \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_{e_2}}) \exp \left\{ -\tilde{\lambda}_s^{l_{e_2}} \exp(\omega_{e_2}) z^{l_{e_2}} \right\} \right. \\ & \quad \left. \cdot \frac{1}{\eta} \Phi \left(\frac{\omega_{e_2}}{\sigma} - \frac{\sigma}{\eta} \right) \exp \left(-\frac{\omega_{e_2}}{\eta} + \frac{\sigma^2}{2\eta^2} \right) \right\}^{\delta_{ij}^{l_{e_2}}} \quad (43) \end{aligned}$$

と表すことができる。これらの条件付き確率密度関数に対してMH法を用いてサンプリングをおこない式(39)の同時事後確率密度関数を算出する。MH法では事後分布(目標分布)からのサンプリングが難しい場合にこれを近似するような分布(提案分布)からサンプリングを行う。これと同時に目標分布と提案分布の差異を修正する。これらの操作をギブスサンプリングと同様の手順に従い繰り返したとき、十分に大きな繰り返し回数においてサンプリングされた標本は目標分布からランダムサンプリングされた標本とみなすことができる¹⁹⁾。

いま、目標分布を $\pi(\theta | \Xi)$ 、提案分布の確率密度関数を $q(\theta' | \theta^{(n-1)})$ と表す。提案分布を用いて n 回目のサンプリングにより事後分布からの標本の候補として $q(\theta' | \theta^{(n-1)})$ に従う標本 θ' を発生させる。提案された標本 θ' は目標分布 $\pi(\theta | \Xi)$ からの標本ではなく、その差を修正するために、確率

$$\psi(\theta' | \theta^{(n-1)}) = \min \left[\frac{\pi(\theta' | \Xi) q(\theta^{(n-1)} | \theta')}{\pi(\theta^{(n-1)} | \Xi) q(\theta' | \theta^{(n-1)})}, 1 \right] \quad (44)$$

に従って受容し $\theta^{(n)} = \theta'$ とする。また棄却された場合には $\theta^{(n)} = \theta^{(n-1)}$ とする。

本研究では、 $\pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \sigma, \eta, \omega, \Xi)$ からのサンプリングに対してはランダムウォークMH法¹⁸⁾を、 $\pi(\sigma | \beta, \eta, \omega, \Xi)$ と $\pi(\eta | \beta, \sigma, \omega, \Xi)$ からのサンプリングに対しては独立MH法¹⁸⁾をそれぞれ適用する。

a) β のサンプリング

まず、 $\pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \sigma, \eta, \omega, \Xi)$ のサンプリングにおいて n 回目の候補を

$$\beta'_{e_1} = \beta_{e_1}^{(n-1)} + \mathcal{N}(0, \nu I) \quad (45)$$

で表されるランダムウォークにより発生させる。なお、 $\mathcal{N}(0, \nu I)$ は0ベクトルを平均、 νI を分散共分散行列とした多次元正規分布であり I は単位行列を表す。 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ はステップ幅を定めるパラメータベクトルである。このとき、提案分布の確率密度 q は $(\beta'_{e_1}, \beta_{e_1}^{(n-1)})$ に関して対称となるために、ランダムウォークにより発生させた候補 ψ_β は確率

$$\begin{aligned} & \psi_\beta(\beta'_{e_1} | \beta_{e_1}^{(n-1)}) \\ & = \min \left[\frac{\pi(\beta'_{e_1} | \beta^{-e_1}, \sigma^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)}{\pi(\beta_{e_1}^{(n-1)} | \beta^{-e_1}, \sigma^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)}, 1 \right] \quad (46) \end{aligned}$$

で受容される。実際の数値計算では区間 $[0, 1]$ で定義される一様分布 $\mathcal{U}(0, 1)$ から一様乱数 $\rho \sim \mathcal{U}(0, 1)$ を発生させ、 $\beta_{e_1}^{(n)}$ を以下のルールに従い決定する。

$$\beta_{e_1}^{(n)} = \begin{cases} \beta_{e_1}^{(n-1)} & \rho > \psi_\beta \\ \beta'_{e_1} & \rho \leq \psi_\beta \end{cases} \quad (47)$$

b) σ と η のサンプリング

σ と η のサンプリングに用いる独立MH法は、事後分布の制約を考慮した提案分布を用いる方法の1つであり広く利用されている。具体的には、 $q(\hat{\theta}'|\hat{\theta}^{(n-1)}) = q(\hat{\theta}')$ のような確率密度を有する提案分布を用いる方法である。このとき、提案分布より発生させた n 回目の候補 σ' が受容される確率は、

$$\begin{aligned} & \psi_{\sigma}(\sigma'|\sigma^{(n-1)}) \\ &= \min \left[\frac{\pi(\sigma'|\beta^{(n)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi) q(\hat{\theta}^{(n-1)})}{\pi(\sigma^{(n-1)}|\beta^{(n)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi) q(\hat{\theta}')} , 1 \right] \end{aligned} \quad (48)$$

と表される。確率的劣化フロンティアモデルにおける条件付き事後確率密度関数 $\pi(\sigma|\beta, \eta, \omega, \Xi)$ と $\pi(\eta|\beta, \sigma, \omega, \Xi)$ は、ともに定義域が0以上という制約を有している。本研究では、これを満たす提案分布として各パラメータの事前分布 $\mathcal{G}(\alpha_0^{\sigma}, \gamma_0^{\sigma})$ および $\mathcal{G}(\alpha_0^{\eta}, \gamma_0^{\eta})$ をそれぞれ採用する。実際の数値計算上での取扱は式(47)と同様である。また、 $\pi(\eta|\beta, \sigma, \omega, \Xi)$ も同様である。

以下に具体的な推定手順を示す。

Step1

事前分布のパラメータ値 $\mu_i, \Sigma_i (i = 1, \dots, I - 1), \alpha_0^{\sigma}, \gamma_0^{\sigma}, \alpha_0^{\eta}, \gamma_0^{\eta}$ を任意に設定する。また、未知パラメータ $\theta = (\beta, \sigma, \eta)$ の初期値 $\theta^{(0)} = (\beta^{(0)}, \sigma^{(0)}, \eta^{(0)})$ 、異質性パラメータの初期値 $\omega^{(0)}$ を任意に設定する。初期値の影響はサンプリング数の増加とともに薄れる。また、定常状態に収束した後のサンプリングとは無関係である。

Step2

未知パラメータベクトル $\theta^{(n)}$ 、異質性パラメータ $\omega^{(n)}$ を次のようにサンプリングする。

Step2-1

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\beta^{(n)}$ を次のように発生させる。

$\beta_1^{(n)}$ を $\pi(\beta_1|\beta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする。

$\beta_2^{(n)}$ を $\pi(\beta_2|\beta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする。

...

$\beta_{I-1}^{(n)}$ を $\pi(\beta_{I-1}|\beta^{(n-1)}, \sigma^{(n-1)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)$ からランダムウォーク MH 法によりサンプリングする。

Step2-2

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\sigma^{(n)}$ を $\pi(\sigma|\beta^{(n)}, \eta^{(n-1)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)$ から独立MH法によりサンプリングする。

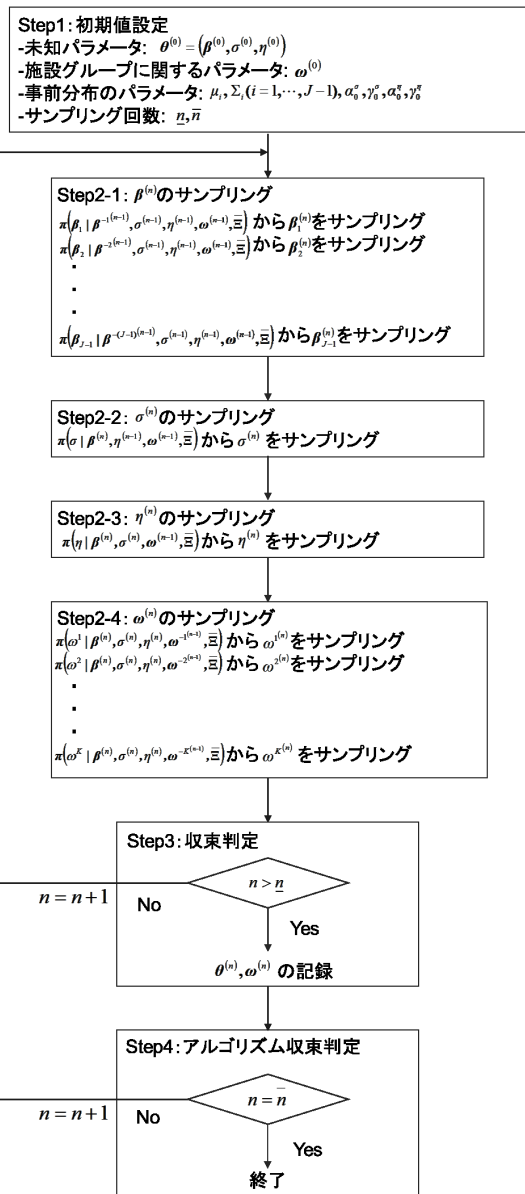


図-3 モデルの推定フロー

Step2-3

サンプリング回数 n の未知パラメータの部分ベクトル $\eta^{(n)}$ を $\pi(\eta|\beta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \omega^{(n-1)}, \Xi)$ から独立MH法によりサンプリングする。

Step2-4

サンプリング回数 n の異質性パラメータ $\omega^{(n)}$ を次のように発生させる。

$\omega_1^{(n)}$ を $\pi(\omega_1^{(n)}|\beta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \eta^{(n)}, \omega^{-1, (n-1)}, \Xi)$ からサンプリングする。

$\omega_2^{(n)}$ を $\pi(\omega_2^{(n)}|\beta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \eta^{(n)}, \omega^{-2, (n-1)}, \Xi)$ からサンプリングする。

...

$\omega_K^{(n)}$ を $\pi(\omega_K^{(n)}|\beta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \eta^{(n)}, \omega^{-K, (n-1)}, \Xi)$ からサンプリングする。

Step3

十分大きな \underline{n} に対して $n > \underline{n}$ ならば $\theta^{(n)} = (\beta^{(n)}, \sigma^{(n)}, \eta^{(n)})$, $\omega^{(n)}$ を記録する.

Step4

$n = \bar{n}$ ならば計算を終了する. $n \neq \bar{n}$ ならば $n = n + 1$ として **Step2** に戻る.

十分大きな \underline{n} に対して, このようなマルコフ連鎖が定常状態に達していると考えれば, ランダムウォーク MH 法と独立 MH 法を用いたサンプリングによる $\theta(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$, ω のサンプリングは式 (39) に示した同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ からのサンプリングと等しくなる. したがって, サンプリングによって得られるこれらの標本 $\theta(n = \underline{n} + 1, \underline{n} + 2, \dots, \bar{n})$ を用いてパラメータベクトル $\theta = (\beta, \sigma, \eta)$ の同時事後確率密度関数に関する統計量を計算することも可能となる.

(4) 事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいてパラメータベクトル $\theta = (\beta, \sigma, \eta)$ に関する推定値を決定することができる. いま, MCMC 法により得られた標本を $\theta = (\beta, \sigma, \eta) = (\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \dots, \theta_W^{(n)})(n = 1, \dots, \bar{n})$ と表すこととする. なお, $W = (I - 1) \cdot M + 1 + 1$ である. このうち, 最初の \underline{n} 個を事後分布への収束過程からの標本と考え標本集合から除去する. その上で, パラメータの標本添字集合を $\mathcal{M} = \{\underline{n} + 1, \dots, \bar{n}\}$ と定義する. このとき, パラメータ θ の同時確率分布関数 $G(\theta)$ は次式のようになる.

$$G(\theta) = \frac{\#\{\theta^{(n)} \leq \theta, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \quad (49)$$

ただし, $\#\{\theta^{(n)} \leq \theta, n \in \mathcal{M}\}$ は論理式 $\theta^{(n)} \leq \theta, n \in \mathcal{M}$ が成立するサンプルの総数である. また, パラメータ θ の事後分布の期待値ベクトル $\tilde{\zeta}(\theta)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\theta) &= (\tilde{\zeta}(\theta_1), \dots, \tilde{\zeta}(\theta_W))' \\ &= \left(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\theta_1^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}}, \dots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\bar{n}} \frac{\theta_W^{(n)}}{\bar{n} - \underline{n}} \right)' \end{aligned} \quad (50)$$

と表される. また, ギブスサンプリングによる標本を用いて, パラメータ θ の $100(1 - 2\kappa)\%$ 信用域は標本順序統計量 $(\underline{\theta}_w^\kappa, \bar{\theta}_w^\kappa)(w = 1, \dots, W)$

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_w^\kappa &= \arg \max_{\theta_w^*} \\ &\left\{ \frac{\#\{\theta_w^{(n)} \leq \theta_w^*, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \end{aligned} \quad (51a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_w^\kappa &= \arg \min_{\theta_w^{**}} \\ &\left\{ \frac{\#\{\theta_w^{(n)} \geq \theta_w^{**}, n \in \mathcal{M}\}}{\bar{n} - \underline{n}} \leq \kappa \right\} \end{aligned} \quad (51b)$$

を用いて $\underline{\theta}_w^\kappa < \theta_w < \bar{\theta}_w^\kappa$ と定義できる.

MCMC 法では初期パラメータ値 $\theta^{(0)}$ が不変分布である事後分布からの標本である保証はない. ギブスサンプリングで発生させた \bar{n} 個のサンプルのうち最初の \underline{n} 個の標本 $\theta^{(n)}(n = 1, \dots, \underline{n})$ を事後分布に収束する過程からのサンプリングと考える. その上で, 第 $\underline{n} + 1$ 回以降の標本を取り上げる. $\underline{n} + 1$ 以降の標本が不変分布である事後分布からの標本であるかを Geweke の方法²³⁾を用いて仮説検定を試みる.

(5) 確率的管理効率性指標

管理グループ k の管理効率性を評価するための確率的管理効率性指標 (Stochastic Efficiency Index : 以下, SEI と略す) は, 式 (20) の関係を用いて

$$SEI_i^k = \frac{\bar{\lambda}_i^{l_k}}{\lambda_i^{l_k}} = \frac{1}{\exp(u_k)} \quad (52)$$

と管理効率性パラメータのみで表すことができる. すなわち, 管理効率性パラメータを推定することにより, 各管理グループの管理的効率性を評価することが可能である. 以降, SEI 指標における健全度 i に関する標記を省略する. 確率的劣化フロンティアモデルの推定結果より異質性パラメータ $\bar{\omega}_k = v_k + u_k(k = 1, \dots, K)$ が求まる. したがって, 管理グループ k における確率的管理効率性指標 SEI^k を推定するためには, $\bar{\omega}_k$ を技術的異質性パラメータ v_k と管理効率性パラメータ u_k に分解することが必要となる. そこで, $\bar{\omega}_k$ を与件とした時の u_k の条件付き確率密度関数を定義する. 参考文献¹³⁾によれば条件付き確率密度関数 $h(u_k|\bar{\omega}_k)$ は

$$\begin{aligned} h(u_k|\bar{\omega}_k) &= \frac{g(u_k, \bar{\omega}_k)}{\hat{f}(\bar{\omega}_k)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi(\bar{\mu}_k/\bar{\sigma})} \exp\left\{-\frac{(u_k - \bar{\mu}_k)^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\} \end{aligned} \quad (53)$$

ただし, $\bar{\mu}_k = \bar{\omega}_k - \frac{\bar{\sigma}^2}{\eta}$

と表される. 条件付き確率密度関数 $h(u_k|\bar{\omega}_k)$ は, 平均 $\bar{\mu}_k$, 分散 $\bar{\sigma}^2$ の非負切断正規分布に従う. したがって, $\bar{\omega}_k$ を与件としたときの管理効率性パラメータ u_k の条件付き期待値は,

$$\begin{aligned} E(u_k|\bar{\omega}_k) &= \bar{\mu}_k + \bar{\sigma} \frac{\phi(-\bar{\mu}_k/\bar{\sigma})}{\Phi(\bar{\mu}_k/\bar{\sigma})} \\ &= \bar{\sigma} \left[\frac{\phi(-\bar{\mu}_k/\bar{\sigma})}{\Phi(\bar{\mu}_k/\bar{\sigma})} + \frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}} \right] \end{aligned} \quad (54)$$

となる. ただし, $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規確率密度関数, 標準生起確率分布関数である. したがって, SEI 指標の JLMS 点推定量²⁴⁾は

$$SEI^k = \exp[E(-u_k|\bar{\omega}_k)] \quad (55)$$

と表すことができる. あるいは, SEI 指標の Battese and Coelli 点推定量 \overline{SEI}^k は

$$\begin{aligned} \overline{SEI}^k &= E[\exp(-u_k)|\bar{\omega}_k] \\ &= \frac{\Phi(-\bar{\sigma} + \bar{\mu}_k/\bar{\sigma})}{\Phi(\bar{\mu}_k/\bar{\sigma})} \exp\left(-\bar{\mu}_k + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\right) \end{aligned} \quad (56)$$

と表される²⁵⁾. $\exp[E(-u_k|\bar{\omega}_k)] \neq E[\exp(-u_k)|\bar{\omega}_k]$ であるため, SEI 指標である JLMS 点推定量と Battese and Coelli 点推定量は一致しない. また, $\bar{\omega}_k$ を与件とした u_k の条件付確率密度関数 (54) は非対称的確率密度関数で表される. このため, 管理効率性指標の信用域を通常の方法で求めることは不可能である. これに対して, Horrace and Schmidt²⁶⁾は $\bar{\omega}_k$ を与件としたときの $\exp(-u_k)$ に関する $(1 - \alpha)\%$ 信用域 $[L_k, U_k]$ が,

$$L_k = \exp(-\bar{\mu}_k - \rho_L^k \bar{\sigma}) \quad (57a)$$

$$U_k = \exp(-\bar{\mu}_k - \rho_U^k \bar{\sigma}) \quad (57b)$$

で与えられることを示した. ただし,

$$\text{Prob}(Z > \rho_L^k) = \frac{\alpha}{2} \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}}\right) \quad (58a)$$

$$\text{Prob}(Z > \rho_U^k) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}}\right) \quad (58b)$$

であり Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. したがって,

$$\Phi(-\rho_L^k) = \frac{\alpha}{2} \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}}\right) \quad (59a)$$

$$\Phi(-\rho_U^k) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}}\right) \quad (59b)$$

となり,

$$\rho_L^k = -\Phi^{-1}\left\{\frac{\alpha}{2} \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}}\right)\right\} \quad (60a)$$

$$\rho_U^k = -\Phi^{-1}\left\{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Phi\left(\frac{\bar{\mu}_k}{\bar{\sigma}}\right)\right\} \quad (60b)$$

で表される. JLMS 点推定量と Battese and Coelli 点推定量のいずれを用いるべきかは分析目的による. 推定した効率性指標を技術的異質性と管理効率性に分解するためには JLMS 点推定量を用いることが望ましい. 一方, SEI 指標を推定することのみを目的とするような場合, 信用域の推定が容易な Battese and Coelli 点推定量を用いることが望ましい.

5. 適用事例

(1) 適用事例の概要

本研究で提案した確率的劣化フロンティアモデルを国土交通省国土技術政策総合研究所で管理されている全国の下水道事業者による管渠点検データに適用し, 本方法論の有効性を検討する. 対象となる事業者では目視点検等の結果に基づいて下水道管渠の健全性が評価されている. 健全性を示す指標については, 地方自治体が独自で定めている場合もあるが, 対象とする事業

表-1 健全度ランク

健全度ランク	緊急度ランク	サンプル数
1	劣化なし	20,906
2	Ⅲ	43,513
3	I,Ⅱ	15,449

表-2 データ諸元

布設年度	1950~2002
点検年度	1989~2008
対象管種	コンクリート管
対象区域	公共下水道
サンプル数	76,988
平均点検間隔 (年)	30.1
管径 800mm 以上	5,604(7.28%)
平均管渠区間延長 (m)	25.2
管理事業体数 (市町村単位)	10

注) 括弧内は全体のサンプル数に対する割合を示している. 平均点検間隔は布設開始時点から今回の分析で利用することができた点検時点の間隔の平均値であり, 実際の点検がその間隔でなされているわけではない.

体では下水道長寿命化計画策定に関する手引き (案)²⁷⁾を用いて下水道管渠の「緊急度」を評価している. 緊急度はいくつかの点検項目によって管渠に生じている異常の程度を評価する総合指標である. 管の腐食, 破損をはじめとする 10 項目の点検項目の中から, スパンごとで評価される管の腐食, 上下方向のたるみと, 管 1 本ごとに評価される項目から総合的に診断される不良発生率の 3 つの診断項目による多段階 (A,B,C) 評価が実施される. その結果を用いて緊急度が 4 段階 (I, II, III, 劣化なし) で評価される. ただし, 緊急度 I が最も劣化した状態を表す. しかし, 本研究で扱ったデータにおいては緊急度 I と判定されたデータを十分に確保することが困難であった. そこで, 従来設定されていた緊急度を参考にしながら表-1 に示す新たな健全度ランクを設定した. また, 推定に使用する情報サンプルは通常同一管渠に対する 2 回の点検データ (事前健全度, 事後健全度) とその点検間隔を 1 情報サンプルとしてカウントする. しかし, 本研究で対象とした下水道事業者では同一管渠に対して 2 回の点検が実施されていない. したがって, 布設開始時点を 1 回目の点検時点と仮定し, 全管渠に対して仮想的に事前健全度 1 を与えた. 健全度ランクと緊急度ランクの対応関係と事後健全度のサンプル数を併せて表-1 に示す.

また, 点検データには点検時の管渠の健全度情報の他に管種, 布設地域, 管径などの構造・材料特性や環境条件が記載されている. 下水道管渠では陶管, コンクリート管, 塩化ビニル管などが主に使用されているが,

表-3 未知パラメータの推定結果

事後分布 統計量	健全度 i	定数項 $\beta_{i,1}$	管径 $\beta_{i,2}$	区間延長 $\beta_{i,3}$
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	1	-3.50 (-3.58 -3.44)	-0.992 (-1.02 -0.955)	1.73 (1.68 1.79)
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	2	-4.29 (-4.36 -4.24)	-0.273 (-0.347 -0.200)	- 0.0820
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	分散 パラメータ σ		2.08 (0.374 6.37)	
期待値 (下限 5%, 上限 5%) Geweke 検定統計量	分散 パラメータ η		0.151 (0.0968 0.234)	
経験損失 T		2.36		
汎関数分散 V		3.72×10^4		
WAIC		2.85		

各管の構造・材料特性が大きく異なるために劣化特性も異なる。例えば、コンクリート管は剛性管であるためにたわみにくい性質を有するが、一方で破損・クラックが生じやすく管路内で発生する硫化水素により腐食が生じやすいという特性がある。塩化ビニル管は可とう管であるためにたわみやすいものの、耐薬品性に優れており硫化水素による腐食は生じにくい特性を有する²⁸⁾。しかし、本研究で用いる健全度は各損傷から総合的に判断された指標であるために、再び損傷ごとの健全度に細分化した上で損傷形態の相違を考慮した分析を行うことは困難である。したがって、管種ごとに確率的フロンティア分析を試みる。また、下水道は使用用途と管理する事業者の規模によって公共下水道と流域下水道の2つに大別される。公共下水道は市町村単位、流域下水道は都道府県単位で管理されている。本研究では、劣化過程に介在する管理事業者が有する管理効率性に関する議論を行うことを目的とするために、同一規模の管理事業者でのグルーピングが必要不可欠である。したがって、公共下水道か流域下水道のいずれかの事業者に限定して分析を進める必要がある。以上の留意点とデータの獲得状況を踏まえ、本研究では、獲得されたデータに対する公共下水道に区別されるコンクリート管の割合が圧倒的に多かったことから、公共下水道に分類されるコンクリート管を対象とし、管理事業者ごとに1つの管理グループを設定した。以上の内容とデータを整理した結果を表-2に示す。確率的劣化フロンティアモデルの推定に用いることのできるサンプル数は76,988であった。また、表-2には上記の内容の他に布設年度、点検年度、平均点検間隔、5.(2)で後述する説明変数の候補となる管径と区間延長に関する情報、管理事業者の数を記載する。なお、説明変

数として使用する管渠の区間延長については全サンプル76,988個の最大値が1となるように基準化した。

(2) 推定結果とパフォーマンス曲線の導出

5.(1)で述べた点検データに基づいて確率的劣化フロンティアモデルを推定した。確率的劣化フロンティアモデルでは、従来のマルコフ劣化ハザードモデルと同様に構造・材料特性や環境条件が及ぼす劣化速度の変動をハザード率の説明変数としてとりあげることができる。説明変数の影響を表す未知パラメータ β_i の推定にあたり、説明変数の候補として表-2に示す管径の大きさと区間延長を考慮した。管径の大きさに関しては、800mm以上の場合には1を、800mm未満の場合には0をとるダミー変数を設定した。また、区間延長に関しては量的変数として考慮した。これらの説明変数の組み合わせの中でパラメータの符号条件とGeweke検定統計量を考慮し、WAIC²⁹⁾最小化を達成する説明変数の組み合わせをもっとも望ましいモデルとして選択した。なお、WAICは経験損失 T と汎関数分散 V を用いて

$$WAIC = T + \frac{V}{n} \tag{61}$$

と表される。ただし、 n はサンプルサイズであり、 T 、 V はそれぞれ

$$T = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \sum_{l_k=1}^{L_k} \log E_{\theta} \left[p(\xi^{l_k} | \theta) \right] \tag{62a}$$

$$V = \sum_{k=1}^K \sum_{l_k=1}^{L_k} \left\{ E_{\theta} \left[\left(\log p(\xi^{l_k} | \theta) \right)^2 \right] - E_{\theta} \left[\left(\log p(\xi^{l_k} | \theta) \right) \right]^2 \right\} \tag{62b}$$

である。また、 $p(\xi^{l_k} | \theta)$ はパラメータ θ が与えられたときに観測データ ξ^{l_k} を得る同時確率密度関数であり、

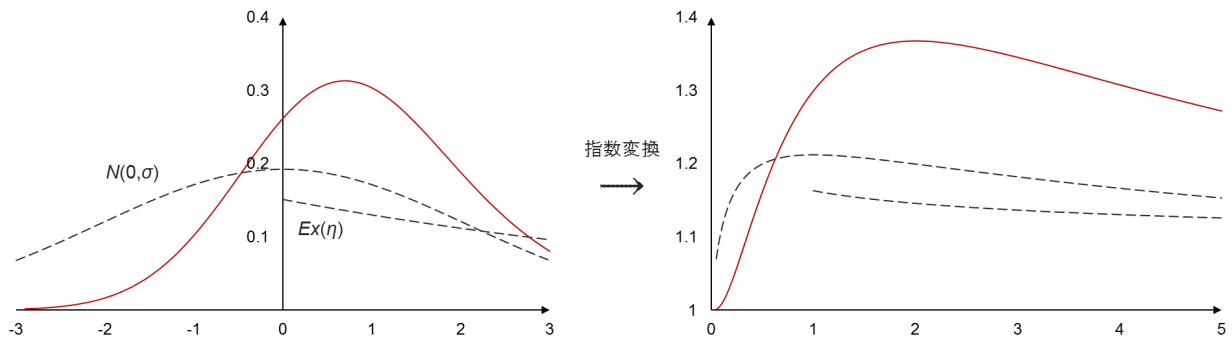


図-4 推定結果に基づく異質性の確率密度関数

式 (35) を利用して計算することができる。 $E_{\theta}[\cdot]$ は事後分布 $\pi(\theta|\Xi)$ (式 (39)) による平均であり、MCMC 法によって得られたパラメータの標本を用いて計算することができる。表-3 の上部には、未知パラメータの期待値、90%信用域および Geweke 検定統計量を示している。また、表-3 の下部には管理グループの異質性が従う確率分布に関するパラメータがそれぞれ記載されている。推定結果より異質性パラメータ ω_k の確率分布を図-4 左の赤線のように特定できる。式 (34a), (34b) より ω_k は平均 $\eta = 0.151$ 、分散 $\eta^2 + \sigma^2 = 4.33$ の混合確率分布に従う。

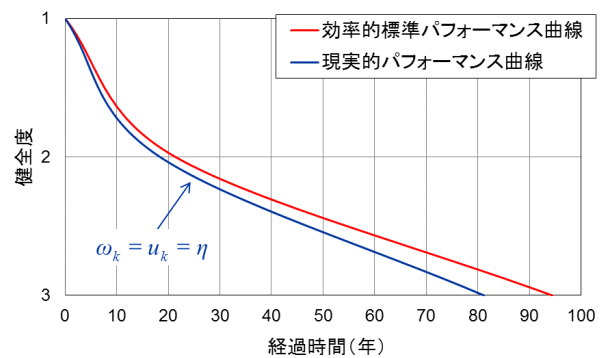


図-5 効率的標準パフォーマンス曲線

推定結果を用いて下水道管渠のパフォーマンス曲線を導出する。マルコフ劣化ハザードモデルはこれまで様々な用途に応じて多くの発展的モデルが開発されてきたが、いずれのモデルにおいても点検データを用いて推定される劣化ハザードモデルは現実に起こっている劣化過程を表現している。これに対して、効率的ハザード率は十分に管理された状況の下で実現するような劣化過程を表している。図-5 には表-3 の推定結果を用いて表現したパフォーマンス曲線を示す。図-5 中の赤線は効率的標準ハザード率のみで表現される施設の効率的標準パフォーマンス曲線である。すなわち、 $\exp(\omega_k) = \exp(u_k) = \exp(v_k) = 1$ が成立する場合に該当する。効率的標準パフォーマンス曲線は技術的異質性が存在しない条件の下で最も効率的な劣化過程を表すパフォーマンス曲線である。一方、図-5 の青線は $\exp(E(\omega_k)) = \exp(\eta) = 1.16$ の場合に該当し、平均的な現実的パフォーマンス曲線を表している。ただし、 ω_k の定義より $E(\omega_k) = E(v_k) + E(u_k) = 0 + \eta$ であることから、青線の示すパフォーマンス曲線は平均的パフォーマンス曲線でもある。したがって、図-5 の効率的標準パフォーマンス曲線と現実的パフォーマンス曲線を比較することにより、今後の施工・管理のあり方の改善によって長寿命化が期待できる年数を定量的に評価することができる。それぞれの劣化過程の期待寿命は、94.4 年と 81.2

年である。したがって、両者の期待寿命の差 13.2 年が初期施工・管理上の原因による早期劣化がもたらす施設寿命への影響の期待値を表している。ただし、図-5 に示した曲線はいずれも説明変数として管径が 800mm 未満で区間延長が平均である場合を想定したものである。図-6 に説明変数の相違を考慮した効率的標準パフォーマンス曲線を示す。区間延長については平均値、最大値、最小値を採用した。当然のことながら、図-5 の赤線で示した効率的標準パフォーマンス曲線は、図-6 の黒色実線で示す曲線と一致する。図-6 のその他の条件において導出された曲線においても、図-5 と同様に効率的標準パフォーマンス曲線と現実的パフォーマンス曲線の比較を通じて管理効率性を評価することができる。

(3) 事業体ごとの管理効率性評価

確率的劣化フロンティアモデルの推定では、表-3 に加え各事業体の異質性パラメータ ω_k を同時に推定できる。また、4.(5) の方法に従い事業体の管理効率性を評価することも可能である。本研究では、各事業体の管理効率性を評価することを目的としているが、この目的を達成するためには指数変換した推定値 $\exp(u_k)$ を求めることが必要となる。以上の理由から、確率的管

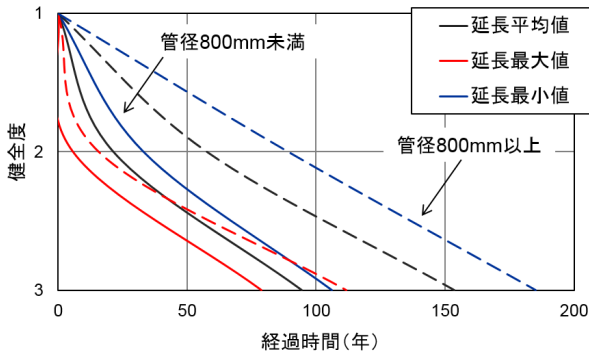


図-6 説明変数の相違による劣化速度の変動

注) 実線が管径 800mm 未満の場合, 点線が管径 800mm 以上の場合の推定結果を示している。

理効率性指標として Battese and Coelli 点推定量 \overline{SEI}^k を採用した. 表-4 には推定結果に基づいて算出した各事業体の確率的管理効率性指標 \overline{SEI}^k , 90%信用域を記載している. 推定結果よりいずれの事業体においても下水道管渠施設が元来有している性能の 87%程度のパフォーマンスを発揮していると評価することができる. 言い換えれば, 各事業体は管理目標となる $\overline{SEI}^k = 1$ に対して約 13%程度のパフォーマンスの改善が可能であることが示唆される. 一方, 各事業体の管理効率性に大きな相違は確認できなかった. これは本研究で対象とした下水道管渠に関して, 現在, 施工・管理分野において突出した新技術が開発・導入された事例が報告されておらず, 施工・管理に関して事業者間で差別化を図ることができなかったためであると考えられる. しかし, 下水道分野でも, 検査ロボットや赤外線センサといった非破壊検査技術や従来よりも効果が高い補修工法が新たに開発・導入されている. こうした施設を対象とした場合には管理グループが有する管理効率性のばらつき具合は大きくなる可能性がある. 過去の確率的フロンティア分析ではこうした対象によって異なる管理効率性のばらつきを表現するために, 管理効率性パラメータが従う確率分布に対して, 本研究で採用した指数分布の他に非負切断正規分布やガンマ分布といった分布を仮定する方法論が提案されている¹³⁾. したがって, 今後, 事業体による管理効率性が多様に分布することが予想される場合には, 分布特性を反映したような管理効率性指標の確率分布を想定することが重要になってくる.

表-5 には各事業体の異質性に関するパラメータを用いて表現される $\exp(\omega_k)$, $\exp(u_k)$, $\exp(v_k)$ の推定値を示している. $\exp(u_k)$ の推定値としては確率的管理効率性指標と同様に Battese and Coelli 点推定量を用いた. 5.(2) で述べたように, $\exp(E(\omega_k)) = \exp(\eta) = 1.16$

表-4 各事業体の管理効率性評価 (Battese and Coelli 点推定量)

事業体 k	期待値	5%下限値	5%上限値
1	0.8696	0.6392	0.9923
2	0.8713	0.6434	0.9924
3	0.8695	0.6390	0.9923
4	0.8694	0.6386	0.9922
5	0.8691	0.6379	0.9922
6	0.8688	0.6372	0.9922
7	0.8680	0.6351	0.9921
8	0.8695	0.6389	0.9923
9	0.8710	0.6425	0.9924
10	0.8677	0.6343	0.9921

表-5 管理グループに関するパラメータの推定結果

事業体 k	異質性 $\exp(\omega_k)$	管理効率性 $\exp(u_k)$	技術的異質性 $\exp(v_k)$
1	1.09	1.149	0.9540
2	0.7086	1.147	0.6175
3	1.112	1.149	0.9672
4	1.154	1.150	1.004
5	1.243	1.151	1.080
6	1.338	1.151	1.163
7	1.641	1.152	1.424
8	1.126	1.150	0.9792
9	0.7711	1.148	0.6717
10	1.782	1.152	1.547

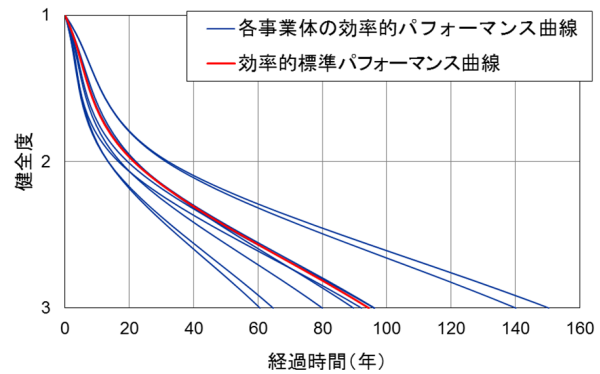


図-7 各事業体の効率的パフォーマンス曲線

を用いて定義したハザード率は平均的なハザード率を意味している. したがって, 各グループごとの異質性パラメータ $\exp(\omega_k)$ の推定値と $\exp(E(\omega_k)) = 1.16$ との大小関係により, 各管理グループの劣化速度の差異を相対的に評価することができる. 一方, 管理効率性を表す $\exp(u_k)$ は 1 を下限値として, 1 に近づくほど施設の運用において効率的であると評価することができる. 他方, 確率的誤差 $\exp(v_k)$ は混合マルコフ劣化ハザードモデルにおいて定義された異質性と同様に,

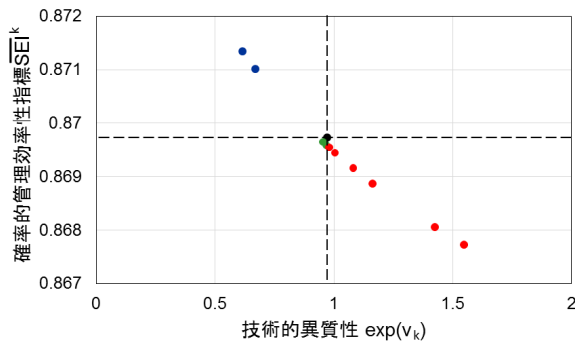


図-8 事業体ごとの劣化速度の相対評価

$\exp(v_k) > 1$ の場合、平均的な劣化過程よりも劣化速度が大きく、 $\exp(v_k) < 1$ の場合、平均的な劣化過程よりも劣化速度が小さいことを表す。各事業体の管理効率性を表現する項 $\exp(u_k)$ を 1 とした場合、各事業体の効率的劣化過程を表現することができる。図-7 には対象とした全ての事業体の効率的パフォーマンス曲線を示している。なお、参考として効率的標準パフォーマンス曲線も併記している。また、説明変数の条件として管径は 800mm 未満、管渠の区間延長は各事業体の平均値を用いた。同様の説明変数の条件の下、各事業体の異質性 $\exp(\omega_k)$ を用いて導出した現実的パフォーマンス曲線と比較することにより、各事業体の施工・管理のあり方の改善による影響を定量的に評価することができる。

(4) 実務的示唆

本研究では、確率的劣化フロンティアモデルを提案することにより、管理グループが有する異質性に含まれる管理効率性と技術的異質性の分離評価を実施した。その結果、以下のような知見を獲得することができる。第 1 に、各事業体は今後施工時の初期不良防止のための技術改良や、維持管理の不備を減少させるための体制改善を実施していく上で、図-7 の結果を具体的な管理目標として設定することが可能である。これまででも管理者は施工・管理のあり方の改善に努めてきた。しかしながら、本研究で提案した管理効率性に相当する管理体制のあり方を評価する指標が存在しなかったために、その効果を定量的に評価することは困難であった。確率的フロンティア分析を用いることによって、各事業体の相対的な管理効率性を定期的に評価することが可能であり、これにより管理効率性の継続的な改善の結果を評価することが期待される。第 2 に、下水道管渠の構造的・材質的な耐久性を表す技術的異質性と管理効率性の関係性を評価することが可能となる。従来の混合マルコフ劣化ハザードモデルを用いた場合、事業

体（あるいは、管理グループ）ごとの劣化速度を相対的に評価することは可能であったが、この両者を分離することは不可能であった。図-8 には各事業体が管理する下水道管渠の構造的・材質的な劣化速度の違いを表す技術的異質性 $\exp(v_k)$ と管理効率性を表す確率的管理効率性指標 \overline{SEI}^k の関係性を示している。対象とする事業体のこれらのパラメータ値 $\exp(v_k)$ 、 \overline{SEI}^k の平均はそれぞれ 0.972、0.870 である。そこで、技術的異質性が平均値 0.972 以上、管理効率性 \overline{SEI}^k が平均値 0.870 以下となる第 4 象限に位置する赤色でプロットされた事業体は、劣化速度が速く、かつ管理効率性も相対的に低いと評価される事業体である。こうした事業体では下水道管渠の技術的向上をめざした更新計画と管理効率性を向上させるためのアセットマネジメントの導入が不可欠である。また、第 3 象限に位置する事業体に対しても下水道管渠の初期施工あるいは技術上の改善の余地が見られることから、下水道管渠の更新を念頭に置きつつアセットマネジメントの維持体制を維持していくことが求められる。また、本適用事例では存在していないが、第 1 象限に位置する事業体は技術的にも管理的にも効率性の高いアセットマネジメントを導入していると評価できる。

6. おわりに

本研究では、確率的フロンティア分析とマルコフ劣化ハザードモデルの考え方に基づいて、技術的異質性と管理効率性を評価するための方法論を提案した。具体的には、確率的フロンティアの考えに基づき、社会基盤施設の効率的な劣化過程を効率的ハザードモデルとして定式化するとともに、異質性に含まれる技術的異質性と管理効率性を分離評価するための方法論を提案した。さらに、下水道管渠への実証分析を通じて、施工・管理のあり方が劣化速度に及ぼす影響を定量的に評価する方法論を提案した。本研究で提案した確率的フロンティア分析を通して、施設の劣化速度の相対評価だけでなく、従来では不可能であった施設の管理効率性を分析することによって、施策の高度な意思決定プロセスを形成することが可能となる。一方、今後に残された課題を以下にあげる。第 1 に、本研究で用いたデータベースに含まれる下水道事業体数はそれほど大きくない。今後、目視点検を実施した下水道事業体の数が多くなれば、確率的フロンティアや技術的異質性、管理効率性の推定精度の向上が期待できる。第 2 に、本研究の実証分析では下水道管渠を対象とした 1 事例を示すに止まったが、今後、適用事例の拡大、考察を通じて、方法論の逐次改善を行うことが重要となる。本研究では、管理効率性を表すパラメータ u_k の従う確率分

布を、混合マルコフ劣化ハザードモデルを推定してきた経験から異質性パラメータ ω_k の分布の歪度が大きくなり、かつ計算が容易であるような分布として、指数分布と仮定した。しかし、対象施設によっては管理効率性が本研究結果で仮定した指数分布では表現しきれない可能性がある。その際には、指数分布を一般化したガンマ分布、あるいは異質性パラメータの分布の歪度が小さくなるような非負切断正規分布といった確率分布を管理効率性パラメータの従う分布として仮定し、詳細な検討を実施する必要がある。第3に、施工・管理の改善効果と費用とのトレードオフ分析を通じたアセットマネジメントの高度化があげられる。現在、老朽化する施設が増加する中で、管理者は財政縮減の中、効率的な管理を行うことが求められる。したがって、施工・管理の改善によってかかる費用とのトレードオフの分析を通じて、より実践的な方法論を構築することが求められる。

参考文献

- 1) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.69-82, 2005.
- 2) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司: 劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.
- 3) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 4) 小林潔司, 熊田一彦, 佐藤正和, 岩崎洋一郎, 青木一也: サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル, 土木学会論文集 F, Vol.63, No.1, pp.1-15, 2007.
- 5) 小林潔司, 貝戸清之, 林秀和: 測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル, 土木学会論文集 D, Vol.64, No.3, pp.493-512, 2008.
- 6) 林秀和, 貝戸清之, 熊田一彦, 小林潔司: 競合的劣化ハザードモデル: 舗装ひび割れ過程への適用, 土木学会論文集 D, Vol.65, No.2, pp.143-162, 2009.
- 7) 小林潔司, 貝戸清之, 江口利幸, 大井明, 起塚亮輔: 舗装構造の階層的隠れマルコフ劣化モデル, 土木学会論文集 D3, Vol.67, No.4, pp.422-440, 2011.
- 8) Le Thanh NAM, 貝戸清之, 小林潔司, 起塚亮輔: ポアソン隠れマルコフ劣化モデルによる舗装劣化過程のモデル化, 土木学会論文集 F4, Vol.68, No.2, pp.62-79, 2012.
- 9) 青木一也, 小田宏一, 児玉英二, 貝戸清之, 小林潔司: ロジックモデルを用いた舗装長寿命化のベンチマーキング評価, 土木技術者実践論文集, 土木学会, Vol.1, pp.40-52, 2010.
- 10) 森悠, 藤原栄吾, 貝戸清之, 小林潔司, 橋本拓己: 相対評価モデルを用いた舗装構造の劣化診断, 土木学会論文集 E1, Vol.67, No.2, pp.91-110, 2011.
- 11) Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E.: Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978.
- 12) Bauer, W.: Recent developments in the econometric estimation of frontiers, *Journal of Econometrics*, Vol.46, pp.39-56, 1990.
- 13) Kumbhakar, S. C. and Lovell, C. A. K.: *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- 14) 小林潔司, 北濃洋一, 渡辺晴彦, 石川美知郎: 下水道システムの費用効率性評価法, 土木学会論文集, No.751/IV-62, pp.111-125, 2004.
- 15) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 16) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 17) Aigner, D., Lovell, C. A. K. and Schmidt, P.: Formulation and estimation of stochastic frontier production function models, *Journal of Econometrics*, Vol.6, pp.21-37, 1977.
- 18) 和合肇: ベイズ計量経済分析, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用, 東洋経済新報社, 2005.
- 19) 伊庭幸人: 計算統計学のフロンティア-計算統計 II, マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺, 岩波書店, 2005.
- 20) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推定法, 土木学会論文集 F, Vol.62, No.3, pp.473-491, 2006.
- 21) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定, 土木学会論文集 A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 22) 貝戸清之, 小林潔司, 青木一也, 松岡弘大: 混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推定, 土木学会論文集 D3, Vol.68, No.4, pp.255-271, 2012.
- 23) Geweke, J.: Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics*, Vol.4, pp.169-193, Oxford University Press, 1996.
- 24) Jondrow, J., Lovell, C. A. K., Materov, I. S. and Schmidt, P.: On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model, *Journal of Econometrics*, Vol.19, pp.233-238, 1982.
- 25) Battese, G. E. and Coelli, T. J.: Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalized frontier production function and panel data, *Journal of Econometrics*, Vol.38, pp.387-399, 1988.
- 26) Horrace, W. C. and Schmidt, P.: Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models, *Journal of Productivity Analysis*, Vol.7, pp.257-282, 1996.
- 27) 国土交通省水管理・国土保全局下水道部: ストックマネジメント手法を踏まえた下水道長寿命化計画策定に関する手引き(案), pp.79-82, 2013.
- 28) 国土交通省 国土技術政策総合研究所: 平成25年度 国土技術政策総合研究所講演会講演集「下水管ストックマネジメントの最新動向」, 国総研資料第759号, pp.45-64, 2013.
- 29) Watanabe, S.: Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory, *Journal of Machine Learning Research*, Vol.11, pp.3571-3594, 2010.

(2015. 5. 21 受付)

STOCHASTIC DETERIORATION FRONTIER ANALYSIS FOR EFFICIENCY EVALUATION OF MANAGEMENT BODIES

Kiyoshi KOBAYASHI, Kiyoyuki KAITO, Kengo OBAMA, Rentaro HAYASHI
and Wataru FUKATANI

The heterogeneity of the deterioration rate of infrastructure is attributable to various factors. In this study, the authors propose a mixed Markov deterioration hazard model considering the heterogeneity of deterioration rate due to technical problems in construction and the heterogeneity due to management problems. In detail, an ideal deterioration process is expressed with a Markov deterioration hazard model excluding the effects of the deterioration caused by the management environment. In addition, the gap between the current deterioration process and the deterioration process that would become the best practice under certain technical conditions is expressed by using management efficiency parameters. Then, the effects of construction and management on deterioration rate are evaluated quantitatively, through the efficiency evaluation based on probabilistic frontier analysis. Lastly, the authors discuss the usefulness of the method proposed in this study, by carrying out the case study of the method to inspection data on sewer culverts.